69
5 E
3

Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu

M

11-16 K 5

4. 2. D 20

54.6.21.

54
13
23

54.
6
21.

BIBLIOTECA
ROMA

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ

νῦν σωζόμενα, ἅπαντα.

ARCHIMEDIS SYRACVSANI

*PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EX*cellentiſſimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam ſeculis deſiderata, atq; à quàm pauciſſimis hactenus uiſa, nuncq; primùm & Græcè & Latinè in lucem edita.

Coll. Rom. Soc. Jesu Cat. inscr.

Quorum Catalogum uerſa pagina reperies.

Ex legato Card. Tolet.

Adiecta quoq; ſunt

EVTOCII ASCALONITAE

IN EOSDEM ARCHIMEDIS LIbros Commentaria, item Græcè & Latinè, nunquam antea excuſa.

Cum Cæſ. Maieſt. gratia & priuilegio ad quinquennium.

[redacted]

An. MDXLIIII.

B. S.

BIBL. NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

ARCHIMEDIS OPERVM HOC LIBRO CONTENTOrum Catalogus.

Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου	Βιβ. β΄.	De ſphæra & cylindro libri	II.
Κύκλου μέτρησις	α΄.	Circuli dimenſio	I.
Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων	α΄.	De conoidibus & ſphæroidibus	I.
Περὶ ἑλίκων	α΄.	De lineis ſpiralibus	I.
Ἐπιπέδων ἰσοῤῥοπικῶν, ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων	β΄.	Planorum æqueponderantium inuenta, uel centra grauitatis planorū.	II.
Ψαμμίτης	α΄.	De harenæ numero	I.
Τετραγωνισμὸς παραβολῆς	α΄.	Quadratura parabolæ	I.
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου		EVTOCII Aſcalonitæ Commentarius in primum & ſecundum Archimedis de ſphæra & cylindro	
Εἰς τὴν τοῦ κύκλου μέτρησιν		In circuli dimenſionem	
Εἰς τὸ α΄ καὶ β΄ τῶν ἰσοῤῥοπικῶν.		In primū & ſecundū æquepōderantiū.	

AMPLISSIMO SENATORVM ORDINI *REIPVBLICAE NORIMBERGENſis, Dominis ſuis incomparabiliter obſeruandis, Thomas Gecbauff, cögnomento Venatorius, ſe ipſum commendat.*

HOMINEM ab ipſomet Opifice rerum, imperium in ipſam terram, adeoq; in ipſas paſſim uniuerſas creaturas accepiſſe: conceſſa etiam, quæ homini, pro modulo ſui ſtatus ſatis eſſet, cognitione rerum, Moſes in ipſo ſtatim libri Geneſeos ueſtibulo, ſcriptum reliquit. Homo autem ſimul atq; mandatum Opificis minus, quàm par erat, ſanctè colere cœpiſſet, prębuiſſetq; iam aures aduerſario lucis, protinus & accepto in rerum creaturas imperio exuitur, & ſummæ felicitatis, ad quam utiq; formatus fuerat, fruitione priuatur: adeò ut iam non tantum longiſſimè à uera felicitate exularet, ſed etiam in ipſa rerum cognitione equidem miſerè cæcutiret. Et meritò quidem. Qui enim ſupremæ contemptor eſt maieſtatis, ſuprema quur non plecteretur pœna? Atqui ne penitus ab ea, ad quam ſemel fabricatus fuerat homo, excideret felicitate: prœterquam quod Deus omnipotens bonitatis ſuæ uerbum, ut carnem indueret, miſit, cuius deinde morte, labes illa contractæ impuritatis ablueretur: rurſus etiam hominem, ad præclariſſimarum rerum cognitionem, ceu per gradus quoſdam artium aſcendere uoluit, ut iam conſtanter nobis polliceri poſſimus, habere quãdam cum uirtute ipſa coniunctionem honeſtas artes omnes. Et ſi enim hodie inuentam ueritatem, ſola ſibi iure uendicat Theologia: inuentam una ſecurè poſſidet pietas Chriſtiana: nõ tamen & alias liberales diſciplinas cõtemnere debemus, ob eam duntaxat cauſam, quòd per ipſas adhuc quæritur Veritas: ſed potius & ipſæ in conſuetudinem humanæ uitæ admittendæ, ne quæ uſu adhuc rerum carent ingenia iuuentutis noſtræ, penitus ſylueſcant, dum perpetuò cultura bonarum artium deſtituuntur. Quod enim præſtat cibus hominibus ut uiuant, id præſtant honeſtæ diſciplinæ, ut bene uiuant. Alimenta corporibus ſi ſubduxeris, ipſa protinus uiuere deſinent: & communi mortalium uitæ honeſtas artes, mox ut ſubducere cœperis, ipſa uita noſtra, quid niſi quàm proximè ad brutorum uitam accedere uidebitur? Quare mea quidem ſententia, hoc iuuentuti ſunt artes honeſtę uniuerſæ, quod himber eſt pratis areſcẽtibus; quod riui hortis, quod agris cultus, & ipſis quod eſt uineis putatio. Cultura artium ut rebus humanis non parum adijcit ſplendoris & ornamẽti, ita contemptus earum & morum & uitæ ſinceritatem non infrequen-

ROMA

ter eneruare uiſus eſt. Literis literatis non exculta uita noſtra, quid aliud
quàm barbara quædam cenſenda eſt barbaries? Certe bonarum artium
ſtudijs, homini præſertim ad immortalitatem contendenti, nulla eſt poſ
ſeſſio uel certior, uel ſecurior: cum quod hæc una poſſeſſio, animũ ad ſo
lidæ uirtutis amorem inflammat: tum quod ea ab initio qui uſi ſunt, ut
uerè inquit Sapiens, participarunt amicitiæ Dei. Vos uerò P.C.
quàm rectiſſimè conſultum eſſe optetis Reipub. literariæ, abunde teſtan-
tur tot paſſim illa ueſtræ liberalitatis collata in ſtudioſos ſubſidia. Et eſt
alioqui apud uos in magno precio philoſophiæ ſtudium: tum præcipuè
in maiore honore haberi à uobis eos autores, qui Mathemata conſcri-
pſerunt, uel hoc nomine, quod Mathematicarũ rerum cognitionem, nu
merare ſoletis inter pulcherrimas atq; utiliſſimas philoſophiæ partes: ut
inde uobis non ſolum multam utilitatem percipiatis priuatim, ſed apud
exteros quoq; & doctos harum rerum, ſummam non rarò inire uiſi ſitis
gratiam publicè. Habuit ordo ueſter Senatorius ſemper tales uiros, qui
uel pulcherrimarum artiũ fuerint ſtudioſi, uel ſaltem qui à rectis ſtudijs
non eſſent prorſus abhorrente animo. Quæ laus cum ipſam ſecum ferat
honeſtatem, non poteſt non eſſe pulcherrima. De uobis, qui hodie gu-
bernacula Reipub. tenetis, ut paucis abſoluere, quod dicere uolo, non
poſſum: ita à me dedicatum uobis Archimedem Siculum illum, Mathe-
maticarum diſciplinarum facile, iudicio doctorum omniũ, principem,
benignè equidem accipere debetis. Hoc enim uno renato, uniuerſa Ma
theſis renata uideri queat. Fuit hactenus in Mathematicis ſcriptionibus
Archimedis nomine celebrius nihil. at qui uerè oculis ſuis tanti autoris
monimenta uiderit, quem mihi conſpiciendũ dabitis? Bilibaldus Pirck-
heymerus, quem uos, dum uiueret, inter doctos doctiſſimum nomina-
ri haud grauatim paſſi eſtis: ille inquam, ut erat uir excellentis ingenij,
cum Rhoma græcè ſcriptum Archimedis noſtri exemplar, opera amici
cuiuſdam, tandem poſt longam expectationem accepiſſet, non tantum
quaſi uilem aliquem in ædibus ſuis paſſus eſt habitare hoſpitem, ſed illũ
quotidianæ ſtudiorum ſuorum conſuetudini uoluit eſſe m conſortem.
Quippe qui nõ ignoraret, hoc ſtudiorum genus olim ſemper religioſiſ-
ſimè ab ipſis ſummis regnorum moderatoribus, illiſq; ſapientiſſimis, &
cultum fuiſſe, & celebratum. Hinc Plato philoſophorũ lumen, in libris
Lib. 7. de Legib. ſcribens, ſuo more præcipere audet, Geometriam (ut alia præ
teream) diſcẽdam eſſe à liberis hominibus. Quem ſequutus M. Fabius
Quintilianus, hanc ipſam diſciplinam futuro Oratori, non tam utilem
quàm neceſſariam etiam eſſe putauit. Itaq; rem gratam facturum me ra-
tus ſum, ſi eum autorem ueſtris potiſſimum auſpicijs in diem protru-
derem, qui unus adhuc ad Mathematicas perfectiones abſoluendas
deeſſe uidebatur. Cæterum, quæ animis ueſtris inſita eſt modeſtia, nõ
egrè laturi eſtis, ſi extremos huius editionis fructus, ad uniuerſos bono

rum ſtu-

rum ſtudiorum cultores cupiam perućturos, laudem uerò ad uos unos commigraturam. Hac enim laude cum primis digni eſtis, quod primi ac penè ſoli ſitis hodie in Germania(abſit inuidia dicto) quorum patrocinio rectorum ſtudiorum cauſa ſuſtentatur, fouetur'q;. Quod exemplum utinam ſequerentur etiam alij; quos habet Germania Principes plures, titulis alioqui non inhoneſtarum rerum inclytos & illuſtres. Certe ab eis res præclarè geſtæ, ad poſteros ut cum laude extendantur, ſine literarum præclariſſimarum adminiculo, rectè ſperare non poſſunt. Sic enim uſu comperimus, neq; nomen ſibi quenquam parare poſſe, neq; locum laudis ullum apud poſteros habiturum, qui hiſce diſciplinis animum ſuum parum bona fide ſtuduit obfirmare. Quare contemptores artium præterquam quòd uitam inglorij tranſigunt, in ipſum etiā conditorē rerum ingrati eſſe conuincuntur. Sunt enim artes honeſtæ omnes, non ſine numinis ſummi certa diſpenſatione ad homines allatæ: ut iam neq; uita dignus cenſeri debeat, qui contemptor eſt eorum bonorum, ſine quibus nec ipſe homo rectè ualere queat. Animus quo eſt corpori præſtantior, hoc diligentiori ſtudio curandus uenit. Curatur autem recta ratione potiſſimum, & uirtute, qua cum cognationem quandam habent omnes ſimul honeſtæ artes. Quas non enim(ut de alijs taceam) illa nobis contulit in uita utilitates, quæ à menſuratione terræ Geometria, Græco nomine eſt uocata? Quid illius diſciplinæ ſtudioſi, ad uitæ humanæ conſeruationem, intentatum reliquerunt? Quid non auſi ſunt in lucem producere illi? An non illorum inuenta ſunt machinæ illæ bellicæ, arietes, telaq; & propugnacula, paſſimq; uniuerſa alia quæ in numero, pondere & mēſura creaſſe Deum ipſum fides Chriſtiana recepit? Corporum cœleſtiū ordines, interualla, magnitudines, ad noſtram notitiam, non'ne Geometræ attulerunt? Scripſit huiuſmodi de rebus Archimedes Siculus ille multa iucunda, utilia & neceſſaria uitæ: in quibus ſunt de Sphæra & cylindro libri duo, copioſe equidem & feliciſſimè ſcripti. De circuli commenſuratione, nihil æquè doctū tradiderunt ueteres, atq; apud hunc noſtrum legere eſt autorem. Si enim circulus in Geometricis figuris eſt linea infinita, in qua nō eſt terminus à quo, (ut uocant:) nec terminus item ad quem, nēpe cuius principiū & finis eſt in quolibet puncto: quis, quæſo, ueterum ea de re Archimede noſtro apertius uel ſcripſit, uel docuit? Quis terminos illos quatuor, quibus uniuerſa Mathemata conſtant, punctum, lineam, planiciem, & profundum, clarius oculis humanis unquam ſubiecit? De planis uero corporibus, ſolidiſq;, de rotundis, conicis quoque, & his quæ more pyramidum aſſurgunt: item de linea, ſuperficie, & corpore, quibus tribus rebus omnis continetur magnitudo: & quia omne corpus tribus conſtat interuallis, longitudine, latitudine, craſſitudine: deniq; de quadrata figura, quæ in architectura principem locum, & iure ſibi congruentem uendicat, cuiq; quaſi proprium eſt, quod eſt cu-

bus ſolidus & ſtabilis, firmiter inſiſtens quaquauerſum ceciderit, quia longitudinem latitudinem & profunditatem habeat. Atq; de his omnibus, quis obſecro uel doctius, uel accuratius, uel diligentius noſtro hoc Archimede tradidit? Sunt hodie non pauci, qui hæc ſtudia magno cum honore ſequuntur, digniq; habentur, quibus uel ſtatuæ, ad immortalem ſtudiorum ſuorum memoriam erigantur. quales potiſſimum noſtra etiam ſecula uiderunt, Ioannem Stofflerum Sueuū, Ioannem Schœnerum Caroloſtadium amicum, & in Mathematis ſtudijs præceptorem unicè mihi dilectum: Bilibaldum quoq; Pyrkheymerum, uirum præclaris rebus obeundis conſultiſſimum: ac paulo ante hæc tempora humanis exutum curis, Simonē Grynæum, uirum ex æquo & doctum & pium, cuiq; hoc unum deerat, quòd in tanta diuinarū humanarūq; rerū cognitione minimè eſſet inflatus. Chriſtianum quoq; Herlinum, Argentinenſem Mathematicum, uirum longè doctiſſimum, hoc loco uel in primis ac iure celebrandum puto, quippe cui non ſolum bonarum artium ſtudioſi, ſed & ipſi Archimedis noſtri manes plurimū debent, quòd in hoſce libros, quo cùm emendatiores, tum elegantib. typis illuſtriores prodirent, ſtudium haud leue impendit. Philippus Melanchthon uero hodie purioris literaturæ, ac ſeuerioris philoſophiæ uindex, cum Ioachimo Camerario Franco, ac altero item ciue meo Ioachimo Rhetico, quid non ſalutaris operæ inſumit, ut quàm latiſſimè odorem ſuum diffundāt recta ſtudia? De affine noſtro Achille P. reconditarum artium ſtudioſo, in primis uero Aſtrologiæ ac Medicinæ ſuprà quàm dici queat perito, hoc parcius hic ſum dicturus, quo ſcio illum eſſe modeſtiorem, quàm ut laudes noſtras in ſe agnoſcere uelit ullas, cum ſit alioqui maximis laudibus dignus. Ioannem à Regiomonte olim ut extra communem mortalium aleam poſuit natura, ita mundus hic, in Mathematicis diſciplinis, maiorem an habuerit in aliquot retro ſæculis, dubitare auſis. Is Rhomæ agens, paulo poſt captā, ac crudeliſſime direptam à Turcis Conſtantinopolitanā ciuitatem: cum iam literatæ literæ, bonis auſpicijs, tanquā ex fuga & tempeſtate ſeruatæ, in Italiam eſſent illatæ: is, inquam ego, primæ uocationi ſuæ in Italiam ultro obſequens, ut ampliſſimam nominis ſuæ famam eſt conſequutus, ita ex Conſtantinopolitana clade ereptos Græcos libros & uidit plurimos, & deſcripſit non paucos articulis proprijs. Inter alia autem Archimedis libros, de ſphæra & cylindro, de circuli dimenſione, deq; alijs rebus non tam utilibus quàm neceſſarijs mortalium generi, ueluti palàm eſt legere in iſtis libris, quos Iacobus Cremonenſis uir ea tempeſtate duplici honore dignus, cum quòd Græcè doctus eſſet, tum quod linguarum commercio adiutus, hanc operam ſolus uideretur abſoluere poſſe, in gratiam Nicolai V. Rom. Pont. iam pridem latinos fecerat: oblatos ſibi ab amicis diligentiſſimè deſcripſit, adiectis non rarò in marginibus, Græcis (quod etiam Græcorum codicum facta fuiſſet ſi-

bi

bi copia) ſi quæ uiſa fuiſſent uel uerſa duriuſculè, uel non admodum intelligenter deſcripta. Altera deinde ſuſcepta in Italiam profectio, ut nõ fuit felix, ita nihil bonorum autorũ ad nos reportare potuit. Hominem enim exuens (non ſine dati ueneni ſuſpicione) ad nos, ciues ſuos, quid referret exanimis? Sed hæc miſſa. Cæterum de quibus diximus, omnes haud illibenter Archimedi noſtro ſunt conceſſuri. Etenim quæ ſcripſit ille, in eo eminentiæ poſita ſunt loco, ut qui palmam artis præripere ei contendere auſit, facile inuenias neminem. Claruit autem Archimedes Syracuſis ciuitate Siciliæ, Mathematicus & Geometra inter primos nobilis: à quo metiendi moles quaſcunq; & facilis & expedita inuenta eſt ratio. Quin etiam terræ globum huiuſmodi inueniſſe, memoriæ proditum eſt, ut dicere non dubitarit: Si alter foret terræ globus, ſe illum ad hunc ſuum pertracturum: uel hunc ſuum, ad illum alterum impulſurũ. Et uerè quidem. Nam ipſe artis ſuæ fiducia, haud paruo tempore obſidionem M. Marcelli remoratus, & patriæ ſimul tutatus eſt muros. Placet etiam, in gratiã ſtudioſorum, C. Plinij calculum hic ſubijcere, ita ſcribentis: Grande & Archimedi Geometricæ & machinalis ſcientiæ teſtimonium, M. Marcelli contigit interdicto, cum Syracuſæ caperentur, ne uiolaretur unus, niſi feſelliſſet imperium militaris imprudentia. Et hæc quidem ad hunc modum dicta ſint ſatis, dum illud quoq; ceu auctarij uice adiecerim: Secretiorem eſſe cauſam & uim liberalium ſtudiorum, quàm ut à prophanis ingenijs percipi queat. Nam illa ex ſtudijs noſtris proueniens cùm laus, tum fructus & gloria, ad unam illam ſummamq; rerum omnium cauſam primam dirigenda ueniunt, cuius præuia bonitate fit ut interim dulces ſint omnes illæ, in recta ſtudia collocatæ curæ, labores, uigiliæ, dum mens noſtra quàm fieri poterit perfectiſſimè ad cognitionem honeſtarum artium penetrare & poſſit & ualeat. Quibus uerò ſpreta ſunt honeſta illa ſtudia noſtra, illos neq; Numinis curam, neq; propriæ felicitatis rationem habere, iam ante meritò diximus. Nos autem qui æquiore iudicio quàm uulgus ſtolidum, expendimus omnia, finem noſtrorum ſtudiorum dicimus eſſe: primum ut Opificem rerũ, quàm fieri queat pleniſſimè cognoſcamus: deinde ut donis illius eruditi, per hanc naturalium rerum cognitionem, animis quoque euadamus meliores ac puriores, dum ipſis tandem ſummis ſpiritibus reddamur quàm ſimilimi, gratia & miſericordia Dei & Seruatoris noſtri: qui & uos & unà uobiſcum Rempub. ueſtram tueatur perpetuò. Amen. Ex Vrbe ueſtra, ad Calend. Decembres. Anno MDXLIII.

Lib. 7. cap. 37.

ARCHIMEDES
de ſeipſo.

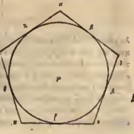
Ipſe Syracuſio ſurgens de ſanguine ciuis,
Corripior patriæ dulcis amore meæ.
Clarus eram ingenio, Siculis cantatus in oris,
Clara ſimul per me Sicilis ora fuit.
Quin rerum domina ut patriam circundaret urbem,
Ars eſt Romanum noſtra morata ducem.
Sed bene quæ uetuit uictor, male corripit arma
Miles, & è multis me tulit auſa manus.
Ni reſpexiſſet miſeram Germania ſortem,
Me ſimul atq; meas commiſerata uices:
Abfuit inde parum mecum monumenta perirent,
Plurima, in extenſos uiuere digna dies.
Quòd ſupero tenebras, cœlo fruiturus aperto
Poſthac, Germanis debeo, non Siculis.

καλῶς ἔχειν μεταδοῦναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων, ἀποστέλλομέν σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντες, ὑπὲρ ὧν ἔξεστι τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι. ἔρρωσο.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ
ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ, ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

ΓΡΑΦΟΝΤΑΙ πρῶτον τὰ ἀξιώματα, καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμὴν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπιφάνειαί τινές εἰσι πεπερασμέναι, αὗται μὲν οὖν ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ἔσται τοῦ ἐπιπέδου ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς ἐπιφανείας, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία. τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ, κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου. ῥόμβον δὲ καλῶ στερεὸν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες, τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα. λαμβάνω δὲ ταῦτα, τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας. ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τῆς εὐθείας τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην. ὁμοίως καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ἔχωσιν, ἐλάσσονα εἶναι τὴν ἐπίπεδον. τῶν δὲ ἄλλων ἐπιφανειῶν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ᾖ, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας. ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἡ ἑτέρα ἐπιφάνεια, καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην. ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν, καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν, καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, τὸ μεταξὺ τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτου, ὃ συντιθέμενον ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων. τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερὸν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.

ΕΑΝ περὶ κύκλον πολύγωνον περιγραφῇ, ἡ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου περίμετρος, α
μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου. περὶ γὰρ κύκλον πολύγωνον περιγεγράφθω τὸ ὑποκείμενον. λέγω, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ βαλ μείζων ἐστὶ τῆς βλ περιφερείας, διὰ τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν περιλαμβάνειν τὴν περιφέρειαν, ὁμοίως καὶ συναμφότερος μὲν ἡ δγ, γβ, τῆς δβ. συναμφότερος δὲ ἡ λκ, κθ, τῆς λθ. συναμφότερος δὲ ἡ ζηθ, τῆς ζθ. ἔτι δὲ συναμφότερος ἡ δε, εζ, τῆς δζ. ὅλη ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

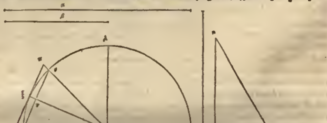


ΔΥο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα, τὰ αβ, δ. β

καὶ ἔστω μεῖζον τὸ α β. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσας εὑρεῖν, τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας. κείσθω διὰ τὸ δεύτερον τοῦ πρώτου τῶν Εὐκλείδου, τῷ δ ἴσον τὸ β γ, καὶ κείσθω τις εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ζ η. τὸ δὴ γ α ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ δ. πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ α θ. καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α θ τοῦ α γ, τοσαπλάσιος ἔστω ἡ ζ η τῆς η ε. ἔστιν ἄρα ὡς θ α πρὸς α γ, οὕτως ἡ ζ η πρὸς η ε. καὶ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ἡ ε η πρὸς η ζ, οὕτως ἡ α γ πρὸς α θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ α θ τοῦ δ, τουτέστι τοῦ γ β. τὸ ἄρα γ α πρὸς τὸ α θ λόγον ἐλάσσονα ἔχει, ἤπερ τὸ γ α πρὸς γ β. καὶ συνθέντι ἡ ε ζ ἄρα πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α β πρὸς β γ (διὰ λῆμμα) ἴσον δὲ τὸ β γ τῷ δ. ἡ ε ζ ἄρα πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α β πρὸς τὸ δ. εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, ποιοῦσαι τὸ (ἴσον) ἐπίταγμα. τουτέστι τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.



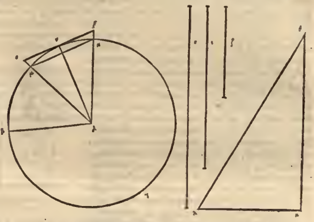
γ Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, καὶ κύκλου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὅπως ἡ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰ, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλευρὰν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη τὰ α β. ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ὑποκείμενος. λέγω οὖν, ὅτι δυνατόν ἐστι ποιεῖν τὸ ἐπίταγμα. εὑρήσθωσαν δὲ δύο εὐθεῖαι αἱ θ, κ λ, ὧν μείζων ἔστω ἡ θ. ὥστε τὴν θ πρὸς τὴν κ λ, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ λ τῇ κ λ πρὸς ὀρθὰς ἡ λ μ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κ μ. δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γ ε, δ ζ. τέμνοντες οὖν τὴν ὑπὸ τῶν δ η γ γωνίαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες λείψομεν τινὰ γωνίαν ἐλάσσονα ἢ διπλασίαν τῆς ὑπὸ λ κ μ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ν η γ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ν γ. ἡ ἄρα ν γ πο-



λυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου. ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ν η γ γωνία μετρεῖ τὴν ὑπὸ δ η γ ὀρθὴν οὖσαν, καὶ ἡ ν γ ἄρα περιφέρεια μετρεῖ τὴν γ δ, τέταρτον οὖσαν κύκλου· ὥστε καὶ τὸν κύκλον μετρεῖ. πολυγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου ἡ γ ν. φανερὸν γάρ ἐστι τοῦτο. καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ γ η ν γωνία δίχα τῇ η ξ εὐθείᾳ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐφαπτέσθω τοῦ κύκλου ἡ ο ξ π. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ η ν π, η γ ο. ὥστε καὶ ἡ π ο πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον, καὶ ἰσοπλεύρου, φανερὸν ὅτι καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ, οὗ πλευρὰ ἡ ν γ. ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία ἡ ὑπὸ ν η γ τῆς ὑπὸ λ κ μ, διπλασία δὲ τῆς ὑπὸ τ η γ, ἐλάσσων ἐστὶν ἄρα ἡ ὑπὸ τ η γ τῆς ὑπὸ λ κ μ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς λ τ. ἡ ἄρα μ κ πρὸς λ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ η πρὸς η τ. ἴση δὲ ἡ γ η τῇ η ξ.

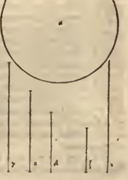
τῇ κξ. ὥστε ἡ κξ πρὸς κτ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τουτέστιν ἡ πο πρὸς νγ. ἢ ἡ μκ πρὸς κλ. ἔτι δὲ ἡ κμ πρὸς κλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α πρὸς τὸ β. καί ἐστι μὲν πο πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου, ἡ δὲ γν τοῦ ἐγγραφομένου· ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν.

Πάλιν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, καὶ τομέως, δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν, πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένου πλευρὰν, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω γὰρ πάλιν δύο δ



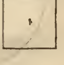
μεγέθη ἄνισα τὰ ε ζ. ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ε, κύκλος δέ τις ὁ αβγ, κέντρον ἔχων τὸ δ. καὶ πρὸς τὸ δ τομεὺς συνεστάτω ὁ αδβ. δεῖ δὴ περιγράψαι, καὶ ἐγγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν αβδ τομέα, ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῶν βδα, ὅπως γένηται τὸ ἐπίταγμα. εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ η θκ ἄνισοι, καὶ μείζων ἡ η. ὥστε τὴν η πρὸς τὴν θκ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ὁμοίως ἀχθείσης πρὸς ὀρθὰς τῇ θκ τῆς θλ, προσβεβλήσθω τῇ η ἴση ἡ κλ. δυνατὸν γάρ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ η τῆς θκ, τεμνομένης δὴ τῆς ὑπὸ τῶν αδβ γωνίας δίχα, καὶ τῆς ἡμισείας δίχα, καὶ ἀεὶ τούτου γινομένου λειφθήσεταί τις γωνία, ἐλάσσων οὖσα ἢ διπλασία τῆς ὑπὸ λκθ. λελείφθω οὖν ἡ ὑπὸ αδμ. ἡ αμ οὖν γὰρ πολυγώνου πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἐὰν τέμωμεν τὴν ὑπὸ αδμ γωνίαν δίχα τῇ δν, καὶ ἀπὸ τοῦ ν, ἐπ' ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τὴν ξο, αὕτη πλευρὰ ἔσται τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, ὅμοιον τῷ εἰρημένῳ. καὶ ὁμοίως τοῖς προειρημένοις ἡ ξο πρὸς τὴν αμ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε μέγεθος πρὸς τὸ ζ.

Κύκλου δοθέντος καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων, περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἐκκείσθω κύκλος ὁ α, καὶ δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ε ζ. καὶ μεῖζον τὸ ε. δεῖ οὖν πολύγωνον ἐγγράψαι εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἄλλο περιγράψαι, ἵνα γένηται τὸ ἐπιταχθέν. λαμβάνω γὰρ δύο εὐθείας ἀνίσους τὰς γ δ. ὧν μείζων ἔσται ἡ γ. ὥστε τὴν γ πρὸς τὴν δ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ ε πρὸς τὸ ζ. καὶ τῶν γ δ μέσης ἀνὰ λόγον ληφθείσης τῆς η, μείζων ἄρα καὶ ἡ γ τῆς η. περιγεγράφθω δὴ περὶ κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὴν τοῦ περιγρα- ε



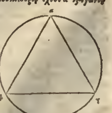
φέντος πολυγώνου πλευράν, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφέντος, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὴν γ̄ πρὸς τὴν η̄, καθὼς ἐμάθομεν. διὰ τοῦτο δὴ καὶ ὁ διπλάσιος λόγος τοῦ διπλασίου ἐλάσσων ἐστί. καὶ τοῦ μὲν τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευράν, διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸ πολύγωνον· ὅμοια γάρ. τῆς δὲ γ̄ πρὸς τὴν η̄, ὁ τῆς γ̄ πρὸς τὴν δ̄. καὶ τὸ περιγραφὲν ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ̄ πρὸς τὴν δ̄. πολλῷ ἄρα καὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε̄ πρὸς τὸ ζ̄. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, καὶ τομέως, δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὅμοιον αὐτῷ, ἵνα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο, ὅτι ἐὰν δοθῇ κύκλος, ἢ τομεύς, καὶ χωρίον τι, δυνατόν ἐστιν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον, ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα. καὶ ἔτι ἀεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα, λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου· ταῦτα γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει παραδίδοται.

ε Δεικτέον δή, ὅτι καὶ κύκλου δοθέντος, ἢ τομέως καὶ χωρίου, δυνατόν ἐστι περιγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν κύκλον, ἢ τομέα, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τῆς περιγραφῆς τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου. ἔστι γὰρ ἐπὶ κύκλου δείξαντα, μεταγαγεῖν τὸν ὅμοιον λόγον καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως. δεδόσθω κύκλος ὁ ᾱ, καὶ χωρίον τι τὸ β̄, δυνατὸν δὴ περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπολειφθέντα τμήματα μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου ἐλάσσονα εἶναι τοῦ β̄ χωρίου. καὶ γὰρ ὄντων δύο μεγεθῶν ἀνίσων, μείζονος μὲν συναμφοτέρου τοῦ χωρίου καὶ τοῦ κύκλου, ἐλάσσονος δὲ τοῦ κύκλου, περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ εἰρημένον μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. τοῦτο δὴ τὸ περιγραφόμενον πολύγωνον ἐστὶν οὗ τὰ περιλείμματα ἔσται, ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου τοῦ β̄. εἰ γὰρ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β̄ χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον· τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μείζων ὁ κύκλος, πολλῷ μᾶλλον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β̄ χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον. καὶ διελόντι ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ β̄ χωρίον πρὸς τὸν κύκλον. ἐλάσσονα ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ β̄ χωρίου, ἢ οὕ. ἐπεὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β̄ χωρίον πρὸς τὸν κύκλον. διὰ τοῦτο δὴ ἔλασσον ἔσται τὸ περιγραφὲν συναμφοτέρου. ὥστε καὶ ἄλλα τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ χωρίου τοῦ β̄. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ τομέως.





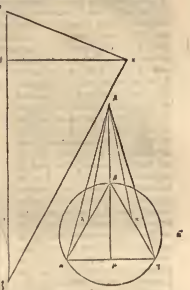
ζ Ἐὰν ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ, βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως. ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως κάθετον ἀγομένην. ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ α β̄ γ κύκλος, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγράφθω πυραμὶς ἰσόπλευρον ἔχουσα τρίγωνον τὸ α β̄ γ. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, καὶ ἰσόπλευρος ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, τὰ ὕψη τῶν περιεχόντων τριγώνων τὴν πυραμίδα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ βάσιν μὲν ἔχει τὰ τρίγωνα, τὰς ᾱ β, β̄ γ, γ̄ α. ὕψος δέ, τὸ εἰρημένον. ὥστε τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην ταῖς ᾱ β, β̄ γ, γ̄ α. ὕψος δὲ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, χωρὶς τοῦ α β̄ γ τριγώνου.



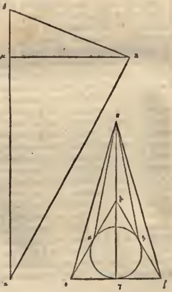
ΣΑΦΕΣΤΕΡΟΝ ΑΛΛΩΣ Η ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις μὲν ὁ α β̄ γ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ

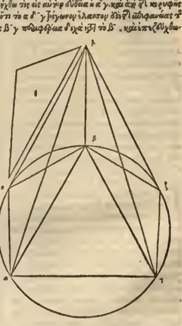
δ σημεῖον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν κῶνον πυραμίς, βάσιν μὲν ἔχουσα ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, δγ, δβ. λέγω ὅτι τὰ αδβ, αδγ, βδγ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ αβγ τριγώνου, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, ἴση τῇ καθέτῳ τῇ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν βγ ἀγομένῃ. ἤχθωσαν γὰρ κάθετοι αἱ δκ, δλ, δμ. αὗται ἄρα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ κείσθω τρίγωνον τὸ εζη, ἔχον τὴν μὲν εζ βάσιν τῇ περιμέτρῳ τοῦ αβγ τριγώνου ἴσην. τὴν δὲ ηθ κάθετον τῇ δλ ἴσην. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν βγ, δλ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δβγ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, δκ διπλάσιον τοῦ αβδ τριγώνου. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ, δμ διπλάσιον τοῦ αδγ τριγώνου. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ αδγ τριγώνου· τουτέστι τῆς εζ καὶ τῆς δλ, τουτέστι τῆς ηθ, διπλάσιον τῶν αδβ, βδγ, αδγ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ εζ, ηθ διπλάσιον τοῦ εζη τριγώνου. ἴσον ἄρα τὸ εζη τρίγωνον τοῖς αδβ, βδγ, αδγ τριγώνοις.



Ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου. ἔστω κώνος οὗ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ πυραμὶς περιγεγράφθω ὥστε τὴν βάσιν αὐτῆς, τουτέστι τὸ δεζ πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν αβγ κύκλον εἶναι. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ ἄξων τοῦ κώνου ὀρθός ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τουτέστι πρὸς τὸν αβγ κύκλον, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. ἔσονται ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς δε, ζε, ζδ. αἱ ηα, ηβ, ηγ ἄρα αἱ εἰρημέναι κάθετοι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πλευραὶ γάρ εἰσι τοῦ κώνου. κείσθω δὲ τὸ τρίγωνον τὸ θκλ, ἴσην ἔχον τὴν μὲν θκ τῇ περιμέτρῳ τοῦ δεζ τριγώνου. τὴν δὲ λμ κάθετον ἴσην τῇ ηα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ δε, αη διπλάσιόν ἐστι τοῦ εδη τριγώνου. τὸ δὲ ὑπὸ δζ, ηβ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δζη τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ εζ, γη διπλάσιον ἐστὶ τοῦ εηζ τριγώνου, ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς θκ καὶ τῆς αη, τουτέστι τῆς μλ, διπλάσιον τῶν εδη, ζδη, ηεζ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν θκ, λμ, διπλάσιον τοῦ λκθ τριγώνου. διὰ ταῦτα δὴ ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως, τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τοῦ δεζ. ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.



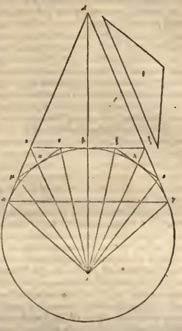
θ Ἐὰν κώνου τινὸς ἰσοσκελοῦς εἰς τὸν κύκλον, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, εὐθεῖα γραμμὴ ἐμπέσῃ, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῆς εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, τὸ περιληφθὲν τρίγωνον, ὑπό τε τῆς ἐμπεσούσης καὶ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν, ἔλασσον ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐπιζευχθεισῶν. ἔστω κώνου ἰσοσκελοῦς βάσις ὁ αβγ κύκλος. κορυφὴ δὲ τὸ δ. καὶ διήχθω τις εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἡ αγ. καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ α γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ. λέγω ὅτι τὸ αδγ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς κωνικῆς, τῆς μεταξὺ τῶν αδγ. τετμήσθω ἡ αβγ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, γβ, δβ. ἔσται δὴ τὰ αβδ, βγδ, τρίγωνα μείζονα τοῦ αδγ τριγώνου, ᾧ δὴ ὑπερέχει τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦ αδγ τριγώνου, ἔστω τὸ θ. τὸ δὴ θ ἤτοι τῶν αβ, βγ τμημάτων ἔλασσόν ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω μὴ ἔλασσον πρότερον. ἐπεὶ οὖν δύο εἰσὶν ἐπιφάνειαι, ἥτε κωνικὴ ἡ μεταξὺ τῶν αδβ, μετὰ τοῦ αεβ τμήματος, καὶ ἡ τοῦ αδβ τριγώνου, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τοῦ αδβ, μείζων ἔσται ἡ περιλαμβάνουσα τῆς περιλαμβανομένης, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν αδβ μετὰ τοῦ αεβ τμήματος, τοῦ αβδ τριγώνου. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μεταξὺ τοῦ δβγ τριγώνου, μετὰ τοῦ γζβ τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ βδγ τριγώνου. ὅλη ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια μετὰ τοῦ θ χωρίου ἐστὶ μείζων τῶν εἰρημένων τριγώνων. τὰ δὲ εἰρημένα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε αδγ τριγώνῳ, καὶ τῷ θ χωρίῳ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ θ χωρίον. λοιπὴ ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν αδβ, μείζων ἐστὶ τοῦ αδγ τριγώνου. ἔστω δὴ τὸ θ ἔλασσον τῶν αβ, βγ τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς αβ, βγ περιφερείας δίχα, καὶ τὰς ἡμισείας αὐτῶν δίχα, λείψομεν τμήματα ἐλάσσονα ὄντα τοῦ θ χωρίου. λελείφθω τὰ ἐπὶ τῶν αε, εβ, βζ, ζγ εὐθειῶν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δε, δζ. πάλιν τοίνυν κατὰ τὰ αὐτά, ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν αδε, μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς αε τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ αδε τριγώνου. ἡ δὲ μεταξὺ τοῦ εδβ μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς εβ τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ εδβ τριγώνου. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν αδβ μετὰ τῶν αε, εβ τμημάτων, μείζων ἐστὶ τῶν αδε, εβδ τριγώνων. ἐπεὶ δὲ τὰ αεδ, δεβ τρίγωνα μείζονά ἐστι τοῦ αβδ τριγώνου, καθὼς δέδεικται, πολλῷ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, ἡ μεταξὺ τῶν αδβ, μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν αε, εβ τμημάτων, μείζων ἐστὶ τοῦ αδβ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν δβγ, μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν βζ, ζγ, μείζων ἐστὶ τοῦ βδγ τριγώνου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν αδγ, μετὰ τῶν εἰρημένων τμημάτων μείζων ἐστὶ τῶν αβδ, δβγ τριγώνων. ταῦτα δέ ἐστιν ἴσα τῷ αδγ τριγώνῳ, καὶ τῷ θ χωρίῳ, ὧν τὰ εἰρημένα τμήματα ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν αδγ, μείζων ἐστὶ τοῦ αδγ τριγώνου.



ι Ἐὰν ἐπιψαύουσαι ἀχθῶσι τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι τῷ κύκλῳ, καὶ συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν καὶ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου εὐθεῖαι ἀχθῶσι, τὰ περιεχόμενα τρίγωνα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν μείζονά ἐστι τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῶν. ἔστω κώνου βάσις μὲν ὁ αβγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ ε σημεῖον. καὶ τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, αἱ αδ, γδ, καὶ ἀπὸ τοῦ ε σημείου ὅ ἐστι κορυφὴ τοῦ κώνου ἐπὶ τὰ α, δ, γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εα, εδ, εγ. λέγω δὲ, ὅτι τὰ αδε, δεγ τρίγωνα

μείζονα

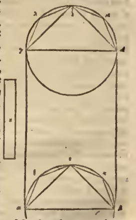
μείζονα ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αε, γε εὐθειῶν, καὶ τῆς αβγ περιφερείας. ἤχθω γὰρ ἡ ηβζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ αγ, δίχα τμηθείσης τῆς αβγ περιφερείας κατὰ τὸ β. καὶ ἀπὸ τῶν η, ζ ἐπὶ τὸ ε ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηε, ζε. καὶ ἐπεὶ μείζους εἰσὶν αἱ ηδ, δζ τῆς ηζ, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ ηα, ζγ. ὅλαι ἄρα αἱ αδ, δγ μείζους εἰσὶ τῶν αη, ηζ, ζγ. καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ, εγ πλευραί εἰσι τοῦ κώνου, ἴσαι εἰσί, διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὸν κῶνον. ὁμοίως δὲ καὶ κάθετοί εἰσιν, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι, τὰ δὲ ὑπὸ τῶν καθέτων καὶ τῶν βάσεων τῶν αηε, ηεζ, ζεγ τριγώνων. εἰσὶ γὰρ αἱ μὲν αη, ηζ, ζγ ἐλάσσους τῶν γδ, δα. τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἴσα. φανερὸν γὰρ, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν τῆς βάσεως ἐπιζευγνυμένη κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην. ᾧ δὴ μείζονά ἐστι τὰ αεδ, δγε τρίγωνα, τῶν αεη, ηεζ, ζεγ τριγώνων, ἔστω τὸ θ χωρίον. τὸ δὴ θ χωρίον, ἤτοι ἔλαττόν ἐστι τῶν περιλειμμάτων τῶν αηβ, βζγ, ἢ οὐκ ἔλαττον. ἔστω πρότερον οὐκ ἔλαττον. ἐπεὶ οὖν εἰσὶν ἐπιφάνειαι σύνθετοι, ἥ τε τῆς πυραμίδος τῆς ἐπὶ βάσεως τοῦ ηαγζ τραπεζίου, κορυφὴν ἔχουσα τὸ ε. καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν αεγ μετὰ τοῦ αβγ τμήματος. καὶ πέρας ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον τοῦ αεγ τριγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ αεγ τριγώνου, μείζων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ τμήματος τοῦ αβγ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ αβγ τμῆμα. λοιπὰ ἄρα



τὰ τρίγωνα τὰ αηε, ηεζ, ζεγ, μετὰ τῶν αηβ, βζγ περιλειμμάτων, μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αε, εγ. τῶν δὲ αηβ, βζγ περιλειμμάτων οὐκ ἔλασσόν ἐστι τὸ θ χωρίον, πολλῷ ἄρα τὰ αηε, ηεζ, ζεγ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ, μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αε, εγ. ἀλλὰ τὰ αηε, ηεζ, ζεγ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ, ἐστὶ τὰ αεδ, δεγ τρίγωνα. τὰ ἄρα αεδ, δεγ τρίγωνα, μείζονα ἔσται τῆς εἰρημένης κωνικῆς ἐπιφανείας. ἔστω δὴ τὸ θ ἔλασσον τῶν περιλειμμάτων, ἀεὶ δὴ περιγράφοντες πολύγωνα περὶ τὰ τμήματα, ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομέν τινα ἀπολείμματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ αμκ, κνβ, βξλ, λογ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ θ χωρίου, καὶ ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ ε. πάλιν φανερὸν, ὅτι τὰ αηε, ηεζ, ζεγ τρίγωνα, τῶν αεμ, μεν, νεξ, ξεο, οεγ τριγώνων ἔσται μείζονα. αἵ τε γὰρ βάσεις τῶν βάσεων εἰσὶ μείζους, τὸ δὲ ὕψος ἴσον. ἔτι δὲ πάλιν ὁμοίως μείζονα ἔχει ἐπιφάνειαν ἡ πυραμὶς, ἡ βάσιν μὲν ἔχουσα τὸ αμνξογ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ ε, χωρὶς τοῦ αεγ τριγώνου, τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αεγ, μετὰ τοῦ αβγ τμήματος. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ αβγ τμῆμα, λοιπὰ ἄρα τὰ αεμ, μεν, νεξ, ξεο, οεγ τρίγωνα, μετὰ τῶν αμκ, κνβ, βξλ, λογ περιλειμμάτων μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν αεγ. ἀλλὰ τῶν μὲν εἰρημένων περιλειμμάτων μεῖζόν ἐστι τὸ θ χωρίον. τῶν δὲ αεμ, μεν, νεξ, ξεο, οεγ τριγώνων μείζονα ἐδείχθη τὰ αεη, ηεζ, ζεγ τρίγωνα. πολλῷ ἄρα τὰ αεη, ηεζ, ζεγ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ χωρίου, τουτέστι τὰ αδε, δεγ τρίγωνα, μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν αεγ εὐθειῶν.

Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ ὀρθοῦ κυλίνδρου δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ἡ μεταξὺ ια
τῶν εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῶν ἐν τῇ ἐπιφα-
νείᾳ

γίας τοῦ κυλίνδρου εὐθειῶν, καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν. ἔστω κύλινδρος ὀρθός, οὗ βάσις μὲν ὁ αβ κύκλος. ἀπεναντίον δὲ ὁ γδ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ. λέγω ὅτι ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ αγ, βδ παραλληλογράμμου. τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν αβ, γδ περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ ε, ζ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εβ, γζ, ζδ. καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ τῆς αβ μείζονές εἰσι, καὶ ἐστὶν ἰσοϋψῆ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπ' αὐτῶν. μείζονα οὖν ἐστὶ τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, τοῦ αβ, γδ παραλληλογράμμου. τίνι ἄρα μεῖζόν ἐστιν, ἔστω τῷ η χωρίῳ. τὸ δὲ η χωρίον ἤτοι ἔλασσόν ἐστι τῶν αε, εβ, γζ, ζδ ἐπιπέδων τμημάτων. ἢ οὐκ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μὴ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν, καὶ τὰ αεβ, γζδ τμήματα πέρας ἔχει τὸ τοῦ αγ, βδ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον. ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια, ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ τὰ αεβ, γζδ τρίγωνα πέρας ἔχει τὸ τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον. καὶ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιλαμβάνει, καὶ ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαί εἰσι. μείζων οὖν ἐστιν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν· καὶ τὰ αεβ, γζδ ἐπίπεδα τμήματα τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῶν αεβ, γζδ τριγώνων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ αεβ, γζδ τρίγωνα. λοιπὴ οὖν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν. καὶ τὰ αε, εβ, γζ, ζδ, ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσεις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ὧν βάσεις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ κυλίνδρου, ἴσα ἐστὶ τῷ αγβδ παραλληλογράμμῳ, καὶ τοῦ η χωρίου. λοιπὴ ἄρα ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ αγβδ παραλληλογράμμου.

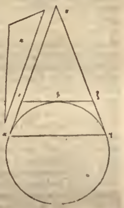


ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ η χωρίον τῶν αε, εβ, γζ, ζδ ἐπιπέδων τμημάτων. καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν αε, εβ, γζ, ζδ περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ θ, κ, λ, μ σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αθ, θε, εκ, κβ, γλ, λζ, ζμ, μδ. τῶν δὲ αε, εβ, γζ, ζδ ἄρα ἐπιπέδων τμημάτων ἀφαιρεῖται οὐκ ἔλασσον ἢ τὸ ἥμισυ, τὰ αθε, εκβ, γλζ, ζμδ τρίγωνα. τούτου οὖν ἑξῆς γινομένου καταλειφθήσεταί τινα τμήματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ η χωρίου. καταλελείφθω, καὶ ἔστω τὰ αθ, θε, εκ, κβ, γλ, λζ, ζμ, μδ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ αθ, θε, εκ, κβ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονα ἔσται τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ αε, εβ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν, καὶ τὰ αεβ, γζδ ἐπίπεδα τμήματα, πέρας ἔχει τὸ τοῦ αγβδ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ αθ, θε, εκ, κβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. καὶ τῶν αθεκβ, γλζμδ εὐθυγράμμων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ αθεκβ, γλζμδ εὐθύγραμμα. λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν. καὶ τὰ αθ, θε, εκ, κβ, γλ, λζ, ζμ, μδ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσεις μὲν αἱ αθ, θε, εκ, κβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ αθ, θε, εκ, κβ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν. καὶ τὰ αθ, θε, εκ, κβ, γλ, λζ, ζμ, μδ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσεις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ὧν βάσεις μὲν αἱ αε, εβ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, ἴσα ἐστὶ τῷ αγδβ παραλληλογράμμῳ, καὶ τῷ η χωρίῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν. καὶ τὰ αθ, θε, εκ, κβ, γλ, λζ, ζμ, μδ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τοῦ αγβδ παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ η χωρίου. ἀφαιρεθέντα δὲ τὰ αθ, θε, εκ, κβ, γλ, λζ, ζμ, μδ τμήματα τοῦ η χωρίου ἐλάσσονα.

λοιπὴ

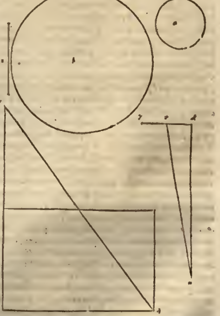
λοιπὰ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ αγβδ παραλληλογράμμου.

Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων τῶν εὐθειῶν ἀχθῶσιν τινὲς ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, αἱ εἰσὶ βάσεις τοῦ κυλίνδρου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν οὖσαι, καὶ συμπέσωσι, τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονα ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ ἔστωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι, ὧν πέρατα τὰ α, γ. ἀπὸ δὲ τῶν α, γ ἤχθωσαν ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ η. νοείσθωσαν δὲ καὶ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τῶν περάτων ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου. δεικτέον ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῆς κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἤχθω γὰρ ἡ εζ ἐπιψαύουσα, καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ σημείων ἤχθωσαν τινὲς εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ἕως τῆς ἐπιφανείας τῆς ἑτέρας βάσεως. τὰ δὴ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν αη, ηγ, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῶν αε, εζ, ζγ, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ γὰρ αἱ εη, ηζ, τῆς εζ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αε, ζγ. ὅλαι ἄρα αἱ ηα, ηγ, μείζους εἰσὶ τῶν αε, εζ, ζγ. ᾧ δὴ μείζονά ἐστιν, ἔστω τὸ κ χωρίον. τοῦ δὴ κ χωρίου τὸ ἥμισυ ἤτοι μεῖζόν ἐστι τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν αε, εζ, ζγ εὐθειῶν, καὶ τῶν αδβ, βθγ περιφερειῶν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον μεῖζον. τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς αε, εζ, ζγ. καὶ τοῦ αεζγ τραπεζίου, καὶ τοῦ κατεναντίον αὐτοῦ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου, πέρας ἐστὶν ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ κατὰ τὴν αγ. ἔστι δὲ καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τῆς κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν. καὶ τῶν τμημάτων τοῦ τε αβγ καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ, πέρας ἡ αὐτὴ περίμετρος. αἱ οὖν εἰρημέναι ἐπιφάνειαι τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τυγχάνουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ τινὰ μὲν περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα αὐτῶν, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχουσιν. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη. ἀφαιρεθέντων οὖν κοινῶν τοῦ τε αβγ τμήματος, καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ἡ κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας, ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς αε, εζ, ζγ. καὶ τῶν σχημάτων τῶν αεβ, βζγ. καὶ τῶν ἀπεναντίον αὐτῶν. αἱ δὲ τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἐλάττους εἰσὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς αη, ηγ. μετὰ γὰρ τοῦ κ μείζονος ὄντος τῶν σχημάτων ἴσαι ἦσαν αὐταῖς. δῆλον οὖν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε αη, γη, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν. εἰ δὲ μή ἐστι μεῖζον τὸ ἥμισυ τοῦ κ χωρίου τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἀχθήσονται εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου σχήματος, ὥστε γενέσθαι τὰ περιλειπόμενα σχήματα ἐλάσσονα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν δειχθήσεται. τούτων δὲ δεδειγμένων, φανερὸν ἐπὶ μὲν τῶν προειρημένων, ὅτι ἐὰν εἰς κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ἕκαστον γὰρ τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα τριγώνων ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν. ὥστε καὶ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, χωρὶς τῆς βάσεως. καὶ ὅτι ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκείνῳ. φανερὸν δὲ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ὅτι τε ἐὰν εἰς κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως. ἔλασσον γὰρ ἕκαστον παραλληλόγραμμον τοῦ πρίσματός ἐστι τῆς καθ᾽ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. καὶ ὅτι ἐὰν περὶ κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν



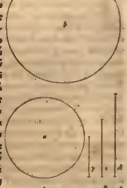
παραλληλογράμμου συγκειμένη, μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

ιγ Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ α κύκλος. καὶ ἔστω τῇ μὲν διαμέτρῳ τοῦ α κύκλου ἴση, ἡ γδ. τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κυλίνδρου ἡ εζ. ἐχέτω δὲ μέσον λόγον τῶν δγ, εζ ἡ η, καὶ κείσθω κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ η, ὁ β. δεικτέον ὅτι ὁ β κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου, χωρὶς τῆς βάσεως. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. δύο δὴ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων, τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, καὶ τοῦ β κύκλου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν β κύκλον ἰσόπλευρον πολύγωνον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον. νοείσθω δὴ περιγεγραμμένον, καὶ ἐγγεγραμμένον. καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγράφθω εὐθύγραμμον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου πρίσμα. ἔσται δὴ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. ἔστω δὲ καὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ περὶ τὸν α κύκλον, ἴση ἡ κδ. καὶ τῇ κδ ἴση ἡ λζ. τῆς δὲ γδ ἡμίσεια ἔστω ἡ γτ. ἔσται δὴ τὸ κδτ τρίγωνον, ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ περὶ τὸν α κύκλον. ἐπεὶ δὴ βάσιν μὲν ἔχει τῇ περιμέτρῳ ἴσην. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου. τὸ δὲ ελ παραλληλόγραμμον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος, τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου. ἐπειδὴ περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. κείσθω δὴ τῇ εζ ἴση ἡ ερ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζρλ τρίγωνον, τῷ ελ παραλληλογράμμῳ, ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὰ εὐθύγραμμα, ὅνπερ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. ἕξει ἄρα τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον εὐθύγραμμον, λόγον, ὃν ἡ τδ πρὸς τὴν η δυνάμει. αἱ γὰρ τδ, η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ἐκ τοῦ κέντρου. ἀλλ' ὃν ἔχει λόγον ἡ τδ πρὸς τὴν η δυνάμει, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει. ἡ γὰρ η τῶν τδ, ρζ μέση ἐστὶν ἀνὰ λόγον, διὰ τὸ καὶ τῶν γδ, εζ. πῶς δὲ τοῦτο; ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν δτ τῇ τγ, ἡ δὲ ρε τῇ εζ. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ γδ τῆς τδ. καὶ ἡ ρζ, τῆς ρε. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δγ πρὸς δτ, οὕτως ἡ ρζ πρὸς ζε. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γδ, εζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τδ, ρζ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν τδ, ρζ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τδ πρὸς η, οὕτως ἡ η πρὸς ρζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τδ πρὸς ρζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς τδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η. ἐὰν γὰρ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνὰ λόγον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος, τὸ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ρλζ. ἐπειδήπερ ἴσαι εἰσὶν αἱ κδ, λζ. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, ὅνπερ τὸ τκδ τρίγωνον πρὸς τὸ ρζλ τρίγωνον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζλρ τρίγωνον, τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ.



θυγράμμου. ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν α κύλινδρον περιγεγραμμένου, τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ περὶ τὸν β κύκλον ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β τῷ κύκλῳ γεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον· καὶ ἐναλλάξ, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον, μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. τὸ δὲ γεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ β κύκλῳ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ β κύκλου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ β κύκλος ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἔστω δὲ, εἰ δυνατὸν, μείζων. πάλιν δὲ νοείσθω εἰς τὸν β κύκλον εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸν β κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α κύκλον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ. καὶ πρίσμα ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. καὶ πάλιν ἡ κδ ἴση ἔστω τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου. καὶ ἡ ζλ ἴση αὐτῇ ἔστω. ἔσται δὴ τὸ μὲν κτδ τρίγωνον μεῖζον τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου. διότι βάσιν μὲν ἔχει τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ. ὕψος δὲ μεῖζον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου πλευρᾶς, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένης καθέτου. τὸ δὲ ελ παραλληλόγραμμον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος, τῇ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένῃ, διότι περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, ὅ ἐστι βάσις τοῦ πρίσματος. ὥστε καὶ τὸ ρλζ τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοια ἐστὶ τὰ εὐθύγραμμα τὰ ἐν τοῖς α, β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν δυνάμει. ἔχει δὲ καὶ τὰ κτδ, ζρλ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα, λόγον, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων δυνάμει. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β ἐγγεγραμμένον. καὶ τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ λζρ τρίγωνον. ἔλασσον δὲ ἐστὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦ κτδ τριγώνου. ἔλασσον ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦ ζρλ τριγώνου, ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένου. ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον περὶ τὸν β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δὲ ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν β κύκλον τοῦ β κύκλου. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ β κύκλῳ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος, οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ β κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων, ἴσος ἄρα ἐστί.

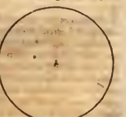
Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς χωρὶς τῆς βάσεως, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου. ιδ



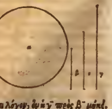
ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ α κύκλος. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἔστω ἡ γ, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἔστω ἴση ἡ δ. τῶν δὲ γ, δ μέση ἀνὰ λόγον ἡ ε. ὁ δὲ β κύκλος ἐχέτω τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ε ἴσην. λέγω ὅτι ὁ β κύκλος ἐστὶν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, χωρὶς τῆς βάσεως. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον ἐλάσσων. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, καὶ ὁ β κύκλος. καὶ μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. δυνατὸν ἄρα εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον. νοείσθω δὴ καὶ περὶ τὸν α κύκλον πολύγωνον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ. καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου πυραμὶς ἀνεστάτω ἀναγεγραμμένη, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοια ἐστὶ τὰ πολύγωνα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας· τουτέστιν, ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς

ε δυνα-

ε δυνάμει, τουτέστιν ἡ γ πρὸς δ μήκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ γ πρὸς δ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν α κύκλον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. ἡ μὲν γὰρ γ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτῳ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου. ἡ δ τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου. κοινὸν δὲ ὕψος ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὰ ἡμίση τῶν ἐπιφανειῶν. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν α κύκλον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον. καὶ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν β κύκλον, περιγεγραμμένῳ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον, περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον. ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ β κύκλῳ, ἔλασσον ἔσται τοῦ β κύκλου. οὐκ ἄρα ὁ β κύκλος ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ μείζων. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω μείζων. πάλιν δὴ νοείσθω εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. καὶ εἰς τὸν α κύκλον νοείσθω ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ᾽ αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστιν τὰ ἐν τοῖς α, β ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ ἡ γ πρὸς τὴν δ μήκει. ἡ δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου πρὸς πλευρὰν τοῦ κώνου, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ β ἐγγεγραμμένον, ἢ αὐτὸ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, τοῦ ἐν τῷ β πολυγώνου ἐγγεγραμμένου. ἐλάσσονα δὲ λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. πολλῷ ἄρα τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐγγεγραμμένης ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ περιγεγραμμένον πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ β κύκλου. ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, οὐκ. ὅτι οὐδὲ μείζων ἐστὶν ὁ κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων, ἴσος ἄρα.

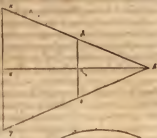


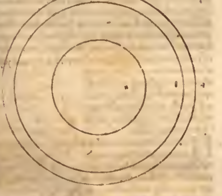
ιε Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρός τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ α κύκλος. ἔστω δὲ τῇ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α, ἴση ἡ β, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου, ἡ γ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν α κύκλον, καὶ ἡ γ πρὸς τὴν β. εἰλήφθω γὰρ τῶν β, γ μέση ἀνὰ λόγον ἡ ε, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ δ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ε. ὁ δ ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ τούτου. ἐδείχθη δὲ ὁ δ κύκλος πρὸς τὸν α κύκλον, λόγον ἔχων τὸν αὐτὸν, τῷ τῆς γ πρὸς β μήκει. ἑκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ε πρὸς β δυνάμει. διὰ τὸ τοὺς κύκλους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων. αἱ γὰρ διάμετροι, καὶ τὰ ἥμισυ, τουτέστιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων, ταῖς δὲ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν, αἱ β, ε. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, πρὸς τὸν α κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ γ πρὸς β μήκει.



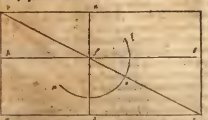
καὶ

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις. ἔστω κῶνος οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον τῷ αβγ. καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει. καὶ ποιείτω τομὴν τὴν δε. ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἔστω βη. κύκλος δέ τις ἐκκείσθω, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τε αδ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ, ηα. ἔστω δὲ κύκλος ὁ θ. λέγω ὅτι ὁ θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν δε, αγ. ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ λ, κ. καὶ τοῦ μὲν κ κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, δυνάσθω τὸ ὑπὸ βδζ. τοῦ δὲ λ, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, δυνάσθω τὸ ὑπὸ βαη. ὁ μὲν ἄρα λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αβγ κώνου. ὁ δὲ κ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεβ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αη, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς αδ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ, αη. διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δζ τῇ αη, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ αβ, αη δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου. τὸ δὲ ὑπὸ βδ, δζ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κ κύκλου. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς δα, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ, αη δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ θ. τὸ ἄρα ἐκ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἐκ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κ, θ κύκλων. ὥστε καὶ ὁ λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τοῖς κ, θ κύκλοις. ἀλλ᾽ ὁ μὲν λ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαγ κώνου. ὁ δὲ κ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δβε κώνου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν δε, αγ, ἴση ἐστὶ τῷ θ κύκλῳ. ις





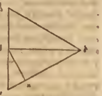
Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ βαη, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἔστω ἡ βη, τετμήσθω ἡ βα πλευρὰ ὡς ἔτυχεν κατὰ τὸ δ, καὶ διὰ τοῦ δ ἤχθω παράλληλος τῇ αη, ἡ δθ. διὰ δὲ τοῦ ζ τῇ βα, ἡ κλ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ βαη ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βδζ, καὶ ὑπὸ δα, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ, αη. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ βαη, ὅλον ἐστὶ τὸ βη. τὸ δὲ ὑπὸ βδζ, τὸ βζ. τὸ δὲ ὑπὸ δα, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ, αη, ὁ μνξ γνώμων. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ δαη, ἴσον ἐστὶ τῷ κη. διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ κθ παραπλήρωμα, τῷ δα παραπληρώματι. τὸ δὲ ὑπὸ δα, δζ, τῷ δλ. ὅλον ἄρα τὸ βη, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὑπὸ βαη, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βδζ, καὶ τῷ μνξ γνώμονι, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ὑπὸ δα, καὶ συναμφοτέρου τῆς αη, δζ.

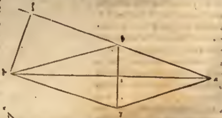


οἱ κῶνοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς βάσεσι. καὶ οἱ ἴσας ἔχοντες βάσεις, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τοῖς ὕψεσιν. ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παρὰ τὴν βάσιν, ἐστὶν ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὡς ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. τοῖς δὲ κυλίνδροις ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν οἱ κῶνοι, οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις τοῖς κυλίνδροις. καὶ τῶν ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσί. καὶ οἱ κῶνοι ὧν αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τοῖς ἄξοσι, τουτέστι τοῖς ὕψεσι, πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ταῦτα δὲ πάντα ὑπὸ τῶν πρότερον ἀποδέδεικται.

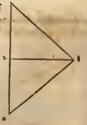


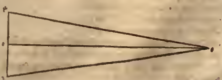
ιζ Ἐὰν ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ᾗ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση, ἡ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου κάθετος ἀγομένη τῷ ὕψει ἴση ᾖ, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι. ἔστωσαν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, οἱ α β γ, δ ε ζ. καὶ τοῦ α β γ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ ε ζ. τὸ δὲ ὕψος τὸ α η, ἴσον ἔστω τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ θ, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, οἷον ἐπὶ τὴν δ ε καθέτῳ ἠγμένῃ τῇ κ θ. λέγω ὅτι ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ α β γ, τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ ε ζ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα ἡ τοῦ β α γ βάσις, πρὸς τὴν τοῦ δ ε ζ βάσιν, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δ ε ζ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δ ε ζ. ἀλλ' ὡς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ δ θ πρὸς τὴν θ κ. ἐδείχθη γὰρ ὅτι παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τουτέστι ἡ δ ε πρὸς δ θ. ὡς δὲ ἡ ε δ πρὸς θ δ, οὕτως ἡ δ θ πρὸς θ κ. ἰσογώνια γάρ ἐστι τὰ τρίγωνα. ἴση δέ ἐστιν ἡ θ κ τῇ α η. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ β α γ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δ ε ζ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ δ ε ζ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ α β γ. τῶν α β γ, δ ε ζ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ β α γ, τῷ δ ε ζ κώνῳ.





ιη Παντὶ ῥόμβῳ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένῳ, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου κώνου τῶν περιεχόντων τὸν ῥόμβον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου. ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ α β γ δ. οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν β γ κύκλος. ὕψος δὲ τὸ α δ. ἐκκείσθω δέ τις ἕτερος ὁ η θ κ, τὴν μὲν βάσιν ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α β γ κώνου ἴσην, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ δ σημείου καθέτῳ ἐπὶ τὴν α β, ἢ τὴν ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἠγμένην. ἔστω δὲ ἡ δ ζ. τὸ δὲ ὕψος τοῦ θ η κ κώνου, ἔστω τὸ θ λ. ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ θ λ τῇ δ ζ. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ ῥόμβῳ. ἐκκείσθω γὰρ ἕτερος κῶνος ὁ μ ν ξ, τὴν μὲν βάσιν ἔχων ἴσην τῇ βάσει τοῦ α β γ κώνου, τὸ δὲ ὕψος

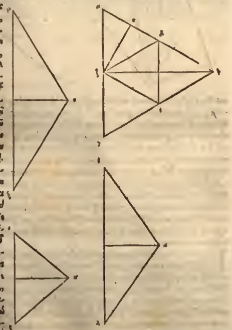




ἴσον

ἴσον τῇ α δ. καὶ ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ ν ο. ἐπεὶ οὖν ἡ ν ο, τῇ α δ ἴση ἐστίν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ν ο πρὸς δ ε, οὕτως ἡ α δ πρὸς δ ε. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ α δ πρὸς δ ε, οὕτως ὁ α β γ δ ῥόμβος πρὸς τὸν β γ δ κῶνον. ὡς δὲ ἡ ν ο πρὸς τὴν δ ε, οὕτως ὁ μ ν ξ κῶνος πρὸς τὸν β γ δ κῶνον, διὰ τὸ τὰς βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσας. ὡς ἄρα ὁ μ ν ξ κῶνος, πρὸς τὸν β γ δ κῶνον, οὕτως ὁ α β γ δ ῥόμβος, πρὸς τὸν β γ δ κῶνον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μ ν ξ, τῷ α β γ δ ῥόμβῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ, ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ κ θ κ. ὡς ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ, πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ βάσις τοῦ κ θ κ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μ ν ξ. ἡ γὰρ βάσις τοῦ α β γ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μ ν ξ. ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ α β πρὸς τὴν β ε, τουτέστιν ἡ α δ πρὸς δ ζ. ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ κ θ κ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μ ν ξ, οὕτως ἡ α δ πρὸς δ ζ. ἴση δὲ ἡ μὲν α δ τῇ ν ο, ὑπόκειται γάρ. ἡ δὲ δ ζ τῇ θ λ. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ κ θ κ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μ ν ξ, οὕτως τὸ ν ο ὕψος πρὸς τὸ θ λ. τῶν κ θ κ, μ ν ξ ἄρα κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐδείχθη δὲ ὁ μ ν ξ ἴσος τῷ α β γ δ ῥόμβῳ, καὶ ὁ κ θ κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ α β γ δ ῥόμβῳ.

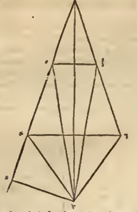
Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου, κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον τῆς βάσεως· ὁ δὲ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς ὁ α β γ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὸν δ ε. κέντρον δὲ τῆς βάσεως ἔστω τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ διάμετρον τὸν δ ε κύκλου, κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ ζ. ἔσται δὴ ῥόμβος ὁ β δ ζ ε, ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος. ἐκκείσθω δή τις κῶνος ὁ κ θ λ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν δ ε, α γ. τὸ δὲ ὕψος ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ ζ σημείου καθέτου, ἐπὶ τὴν α β τῆς ζ η. ἔστω ἴσον τῇ ζ η. λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ α β γ κώνου νοηθῇ ἀφῃρημένος ὁ β δ ζ ε ῥόμβος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ θ κ λ κῶνος. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ μ ν ξ, ο π ρ. ὥστε τὴν μὲν τοῦ μ ν ξ βάσιν ἴσην εἶναι τῇ τοῦ α β γ κώνου ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ζ η. διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ μ ν ξ κῶνος τῷ α β γ κώνῳ. ἐὰν γὰρ ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει. ἔτι δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου ἀγομένη καθέτος, τῷ ὕψει ἴση, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι. τὴν δὲ τοῦ ο π ρ κώνου βάσιν ἴσην εἶναι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ β ε κώνου, ὕψος δὲ τῇ ζ η. διὰ δὴ ταῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ ο π ρ κῶνος, τῷ β δ ζ ε ῥόμβῳ. τοῦτο γὰρ προαπεδείχθη. ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ α β γ κώνου ἐπιφάνεια σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ β δ ε ἐπιφανείας, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν δ ε, α γ. ἀλλ' ἡ μὲν τοῦ α β γ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μ ν ξ κώνου. ἡ δὲ τοῦ δ β ε ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ο π ρ. ἡ δὲ μεταξὺ

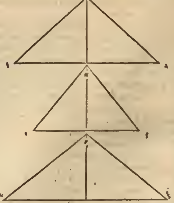


τῶν δ ε, α γ, ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θ κ λ. ἡ ἄρα τοῦ μ ν ξ βάσις ἴση ἐστὶ βάσεσι τῶν θ κ λ, ο π ρ, καὶ εἰσὶν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ μ ν ξ κῶνος τοῖς θ κ λ, ο π ρ κώνοις. ἀλλ' ὁ μὲν μ ν ξ κῶνος

κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αβγ κώνῳ. ὁ δὲ πορ, τῷ βδεζ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ θκλ κῶνος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἐστίν.

κ Ἐὰν ῥόμβου δὲ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένου, ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ, κορυφὴν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ ἑτέρῳ κώνῳ· ἀπὸ δὲ τοῦ ὅλου ῥόμβου ὁ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω ῥόμβος δὲ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ αβγδ. καὶ τμηθήτω ὁ ἕτερος κῶνος, ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν εζ. ἀπὸ δὲ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν εζ κύκλου, κῶνος ἀναγεγράφθω τὴν κορυφὴν ἔχων τὸ δ σημεῖον, ἔσται δὴ γεγονὼς ῥόμβος ὁ εβδζ. καὶ νοείσθω ἀφῃρημένος ἀπὸ



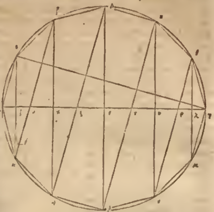


τοῦ ὅλου ῥόμβου. ἐκκείσθω δέ τις κῶνος ὁ θκλ, τὴν μὲν βάσιν ἴσην ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν αγ, εζ. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ δ σημείου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν βα, ἢ τὴν ἐπ' εὐθείας αὐτῇ. λέγω ὅτι ὁ θκλ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ περιλείμματι. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι, οἱ μνξ, οπρ. καὶ ἡ μὲν βάσις τοῦ μνξ κώνου ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αβγ. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ δη. διὰ δὴ τὰ προδειχθέντα, ἴσος ἐστὶν ὁ μνξ κῶνος τῷ αβγδ ῥόμβῳ. τοῦ δὲ οπρ κώνου, ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εβζ κώνου. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ δη. ὁμοίως δὴ ἴσος ἐστὶν ὁ οπρ κῶνος, τῷ εβδζ ῥόμβῳ. ἐπεὶ δὲ ὁμοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ κώνου, σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ εβζ, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν εζ, αγ. ἀλλὰ ἡ μὲν τοῦ αβγ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μνξ. ἡ δὲ τοῦ εβζ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ οπρ κώνου. ἡ δὲ μεταξὺ τῶν εζ, αγ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θκλ, ἡ ἄρα βάσις τοῦ μνξ ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσι τῶν οπρ, θκλ. καὶ εἰσὶν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ὁ μνξ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τοῖς θκλ, οπρ κώνοις. ἀλλ' ὁ μὲν μνξ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αβγδ ῥόμβῳ. ὁ δὲ οπρ κῶνος τῷ εβδζ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ κῶνος ὁ θκλ, ἴσος ἐστὶ τῷ περιλείμματι τῷ λοιπῷ.

κα Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἰσόπλευρον, καὶ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὥστε αὐτὰς παραλλήλους εἶναι μιᾷ ὁποιᾳοῦν τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν, αἱ ἐπιζευγνύουσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τοῦτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα τὰς μιᾶ ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου. ἔστω κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω τὸ αεζβηθγμνδλκ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εκ, ζλ, βδ, ην, θμ. δῆλον δὴ ὅτι παράλληλοί εἰσι τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ. λέγω οὖν, ὅτι αἱ εἰρημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τὴν αγ, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ τῆς γε πρὸς εα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ζκ, λβ, ηδ, θν. παράλληλος ἄρα ἡ μὲν ζκ τῇ εα, ἡ δὲ βλ τῇ ζκ. καὶ ἔτι ἡ μὲν δη τῇ βλ, ἡ δὲ θν τῇ δη. καὶ ἡ γμ τῇ θν. καὶ ἐπεὶ δύο παράλληλοί εἰσιν αἱ εα, κζ, καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ εκ, αο. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ

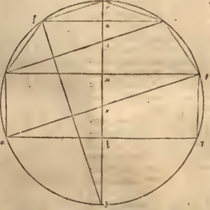
εξ

εξ, πρὸς ξα, ἡ κξ πρὸς ξο. ὡς δὲ ἡ κξ πρὸς ξο, ἡ ζπ πρὸς πο. ὡς δὲ ἡ ζπ πρὸς πο, ἡ λπ πρὸς πρ. ὡς δὲ ἡ λπ πρὸς πρ, οὕτως ἡ βσ πρὸς σρ. καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν βσ πρὸς σρ, ἡ δσ πρὸς στ. ὡς δὲ ἡ δσ πρὸς στ, ἡ ηυ πρὸς υτ. καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν ηυ πρὸς υτ, ἡ νυ πρὸς υφ. ὡς δὲ ἡ νυ πρὸς υφ, ἡ θχ πρὸς χφ. καὶ ἔτι ὡς μὲν ἡ θχ πρὸς χφ, ἡ μχ πρὸς χγ. καὶ πάντα ἄρα πρὸς πάντα ἐστὶν ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα. ὡς ἄρα ἡ εξ πρὸς ξα, οὕτως αἱ εκ, ζλ, βδ, ην, θμ, πρὸς τὴν αγ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ εξ πρὸς ξα, οὕτως ἡ γε πρὸς εα. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ γε πρὸς εα, οὕτως πᾶσαι αἱ εκ, ζλ, βδ, ην, θμ, πρὸς τὴν αγ διάμετρον.



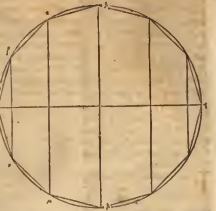
Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου πολύγωνον ἐγγραφῇ τὰς πλευρὰς ἔχον χωρὶς τῆς βάσεως ἴσας καὶ ἀρτίους, ἀχθῶσιν δὲ εὐθεῖαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὰς πλευρὰς ἐπιζευγνύουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἀχθεῖσαι πᾶσαι καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς βάσεως, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ἐκ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τῇ πλευρᾷ τοῦ πολυγώνου ἐπιζευγνυμένη, πρὸς τὴν τοῦ πολυγώνου πλευράν. κβ

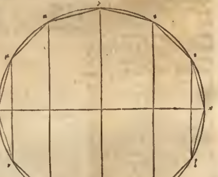
εἰς γὰρ κύκλον τὸν αβγ, διήχθω τις εὐθεῖα ἡ αγ, καὶ ἐπὶ τῆς αγ πολύγωνον ἐγγεγράφθω εἰς τὸ αβγ τμῆμα ἀρτιόπλευρόν τι, καὶ ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῆς βάσεως τῆς αγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζκ, εθ, αἵ εἰσι παράλληλοι τῇ βάσει τοῦ τμήματος. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς αἱ ζκ, εθ, αξ πρὸς βξ, οὕτως ἡ δζ πρὸς ζβ. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηε, αθ. παράλληλοι ἄρα εἰσὶ τῇ βζ. διὰ δὴ ταῦτα ἐστὶν ὡς ἡ κζ πρὸς κβ, ἡ ηκ πρὸς κλ, καὶ ἡ εμ πρὸς μλ, καὶ ἡ μθ πρὸς μν, καὶ ἡ ξα πρὸς ξν. καὶ ὡς ἄρα πάντα πρὸς πάντα, ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα, ὡς ἄρα αἱ ζκ, εθ, αξ πρὸς βξ, οὕτως ἡ ζκ πρὸς κβ. ὡς δὲ ἡ κζ πρὸς κβ, οὕτως ἡ δζ πρὸς ζβ. ὡς ἄρα ἡ δζ πρὸς ζβ, οὕτως αἱ ζκ, εθ, αξ πρὸς βξ.



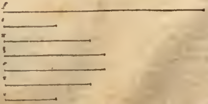
Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. αἱ δὲ αγ, βδ διάμετροι ἔστωσαν. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς αγ διαμέτρου, περιενεχθῇ ὁ αβγδ κύκλος ἔχων τὸ πολύγωνον, δῆλον ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια αὐτοῦ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐνεχθήσεται, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου γωνίαι χωρὶς τῶν πρὸς α, γ σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν ἐνεχθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔσονται, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου παρὰ τὴν βδ οὖσαι. αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου πλευραὶ κατὰ τινῶν κώνων ἐνεχθήσονται. αἱ μὲν αζ, αν κατ᾽ ἐπιφανείας κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζν, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. αἱ δὲ ζη, μν κατά τινος κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν μη, κορυ- κγ

φὴ δὲ τὸ σημεῖον καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ζκ, μν ἀλλήλαις τε καὶ τῇ αγ. αἱ δὲ βν, μδ πλευραὶ ἐπὶ κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται. ἧς βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος, ὁ περὶ διάμετρον τὴν βδ, ὀρθὸς πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ βν, δμ, ἀλλήλαις τε καὶ τῇ γα. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ πλευραὶ ἐπὶ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, πάλιν ὁμοίων ταύταις. ἔσται δὴ τι σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, τῶν προειρημένων. οὗ ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. διαιρεθείσης γὰρ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν βδ ὀρθοῦ, πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου ἡμισφαιρίου, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν πέρας ἐστί, τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια, τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βδ ὀρθοῦ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ περιλαμβάνεται αὐτῶν ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχοντος αὐτῇ. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ σχήματος ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας. καὶ ὅλη οὖν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.





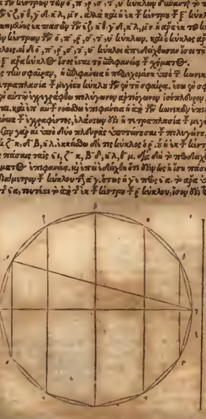
κδ Ἡ τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ σχήματος, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου (τετραπλεύρου) παραλλήλοις οὔσαις τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ. ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται. καὶ ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου νοείσθω τι εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραφὲν σχῆμα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζθ, γδ, κλ, μν, παράλληλοι οὖσαι τῇ ὑπὸ δύο πλευ-



ρὰς

ρὰς ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ. κύκλος δή τις ἐκκείσθω ὁ ξ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αε, καὶ τῆς ἴσης ταῖς εζ, κθ, γδ, κλ, μν. λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένου σχήματος. ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ ο, π, ρ, σ, τ, υ. καὶ τοῦ μὲν ο, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς εα, καὶ τῆς ἡμισείας τῆς εζ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ π, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς εα καὶ τῆς ἡμισείας τῶν εζ, κθ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς εα καὶ τῆς ἡμισείας τῶν κθ, γδ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ σ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αε, καὶ τῆς ἡμισείας τῶν γδ, κλ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ τ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αε, καὶ τῆς ἡμισείας τῶν κλ, μν. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ υ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αε. καὶ τῆς ἡμισείας τῆς μν. διὰ δὴ ταῦτα ὁ μὲν ο κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αεζ κώνου, ὁ δὲ π τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν εζ, κθ. ὁ δὲ ρ τῇ μεταξὺ τῶν κθ, γδ. ὁ δὲ σ τῇ μεταξὺ τῶν δγ, κλ. καὶ ἔτι ὁ μὲν τ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν κλ, μν. ὁ δὲ υ τῇ τοῦ μβν κώνου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστί. οἱ πάντες ἄρα κύκλοι ἴσοι εἰσὶ τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ φανερὸν ὅτι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων, δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αε καὶ δὶς τῶν ἡμίσεων τῶν εζ, κθ, γδ, κλ, μν. αἳ ὅλαι εἰσὶν αἱ εζ, κθ, κλ, μν. αἱ ἄρα ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αε καὶ πασῶν τῶν εζ, κθ, γδ, κλ, μν. ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ξ κύκλου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς αε, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ πασῶν τῶν εζ, κθ, γδ, κλ, μν. ἡ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ξ κύκλου δύναται τὰς ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων. καὶ ὁ κύκλος ἄρα ὁ ξ, ἴσος ἐστὶ τοῖς ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλοις. οἱ δὲ ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλοι ἐπεδείχθησαν ἴσοι τῇ εἰρημένῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ὁ ξ ἄρα κύκλος ἴσος ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος.

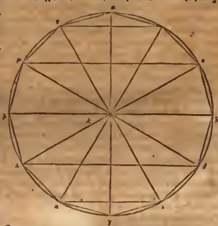
Τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν, ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. κε ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται. καὶ ἐπ' αὐτοῦ νοείσθω ἐπιφάνεια ἡ ἀπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχομένη. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγραφέντος, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἄρα ει, θμ. καὶ ταύταις παράλληλοι αἱ ζκ, δβ, ηλ. ἐκκείσθω δή τις κύκλος ὁ ρ. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ τῆς εα, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ει, ζκ, βδ, ηλ, θμ. διὰ δὴ τὸ προδειχθὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος τῇ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἴση πάσαις ταῖς ει, ζκ, βδ, ηλ, θμ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τὴν αγ. οὕτως ἡ γε πρὸς εα. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς εἰρημέναις, καὶ τῆς εα, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ κύκλου, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αγ, γε. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ αγ, γε ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ τῆς αγ. ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ ρ κύκλου, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ αβγδ κύκλου. καὶ δύο ἄρα τοῦ αβγδ κύκλου διάμετροι, μείζους εἰσὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ρ κύκλου. καὶ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ αβγδ κύκλου, τουτέστι τῆς αγ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ ρ κύκλου διαμέτρου. ὡς δὲ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ ρ κύκλου διαμέτρου, οὕτως τέσσαρες κύκλοι οἱ αβγδ πρὸς τὸν ρ κύκλον. τέσσαρες ἄρα κύκλοι οἱ αβγδ, μείζους εἰσὶ τοῦ ρ κύκλου.

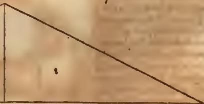


ὁ ἄρα κύκλος ὁ ρ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου. ὁ ρ κύκλος ἴσος ἐδείχθη

τῇ εἰρημένῃ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

κϛ Τῷ ἐγγραφομένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγραφέντος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω ἡ σφαῖρα καὶ ὁ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον. ἔστω δὲ κῶνος ὀρθὸς ὁ ρ, βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. δεικτέον ὅτι ὁ κῶνος ὁ ρ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι. ἀπὸ γὰρ τῶν κύκλων ὧν εἰσὶ διάμετροι αἱ ζν, ημ, θλ, ικ, κῶνοι ἀναγεγράφθωσαν, κορυφὴν ἔχοντες τὸ τῆς σφαίρας κέντρον. ἔσται δὴ ῥόμβος στερεὸς ἐκ τε κώνου, οὗ βάσις μὲν ἔσται ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν ζν, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. καὶ τοῦ κώνου οὗ βάσις ὁ αὐτὸς κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ χ σημεῖον, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ να ζ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ καθέτῳ ἠγμένῃ. πάλιν δὲ καὶ τὸ παραλελειμμένον τοῦ ῥόμβου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὴν ζν ημ. καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων τοῦ τε ζνχ, καὶ τοῦ ημχ, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς μν ζη. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ ἐπὶ τὴν ζη καθέτῳ ἠγμένῃ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. ἔτι δὲ καὶ τὸ παραλειπόμενον τοῦ κώνου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ημ, βδ, καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ μηχ κώνου. καὶ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἴσον ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ημ, βδ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ ἐπὶ τὴν βη καθέτῳ ἠγμένῃ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ ὅ τε ῥόμβος ὁ χκγι, καὶ τὰ περιλείμματα τῶν κώνων ἴσα ἐστὶ τοσούτοις καὶ τηλικούτοις κώνοις, ὅσοι καὶ πρότερον ἐρρέθησαν. δῆλον οὖν ὅτι καὶ ὅλον τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἴσον ἐστὶ πᾶσι τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ κῶνοι ἴσοι εἰσὶ τῷ ρ κώνῳ. ἐπειδὴ ὁ ρ κῶνος ὕψος μὲν ἔχει ἑκάστῳ ἴσον τῶν εἰρημένων κώνων. βάσιν δὲ ἴσην πάσαις ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκκειμένῳ κώνῳ.

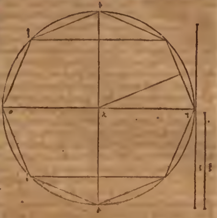




κζ Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, ἔλασσον ἐστὶν ἢ τετραπλάσιον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ γινόμενος κῶνος ἴσος τῷ σχήματι τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὴν βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ὁ ρ. ὁ δὲ κῶνος

ὁ ξ

ὁ ξ ἴσον, βάσιν ἔχων ἴσην τῷ α β γ δ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α β γ δ κύκλου. ἐπεὶ οὖν ὁ ρ κῶνος βάσιν ἔχει ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν α ζ. ἐδείχθη δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου. ἔστιν ἄρα ἡ τοῦ ρ κώνου βάσις ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τῆς βάσεως τοῦ ξ κώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὕψος τοῦ ρ ἔλασσον τοῦ ὕψους τοῦ ξ κώνου. ἐπεὶ οὖν ὁ ρ κῶνος τὴν μὲν βάσιν ἔχει ἐλάσσονα ἢ τετραπλασίαν τῆς τοῦ ξ βάσεως, τὸ δὲ ὕψος ἔλασσον τοῦ ὕψους, δῆλον ὡς καὶ αὐτὸς ὁ ρ κῶνος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ ξ κώνου. ἀλλὰ καὶ ὁ ρ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. τὸ ἄρα ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ ξ κώνου.



Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. περὶ δὲ τὸν α β γ δ κύκλον περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. τὸ δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον, κύκλος περιγεγραμμένος περιλαμβανέτω, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον γινόμενος τῷ α β γ δ, μενούσης δὴ τῆς ε η περιενεχθήτω τὸ ε ζ η θ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τό τε πολύγωνον καὶ ὁ κύκλος. δῆλον οὖν ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ α β γ δ κύκλου κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας οἰσθήσεται. ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ ε ζ η θ, κατ' ἄλλης ἐπιφανείας σφαίρας τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσης τῇ ἐλάσσονι οἰσθήσεται. αἱ δὲ ἁφαὶ καθ' ἃς ἐπιψαύουσιν αἱ πλευραί, γράψουσι κύκλους ὀρθοὺς πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ. αἱ δὲ γωνίαι τοῦ πολυγώνου χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς ε, η σημείοις, κατὰ κύκλων περιφερειῶν οἰσθήσονται, ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν ε ζ η θ κύκλον. αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρὸ τοῦ. ἔσται οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, περὶ μὲν τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν περιγεγραμμένον, ἐν δὲ τῇ μείζονι ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, οὕτως δειχθήσεται. ἔστω γὰρ ἡ κ δ διάμετρος κύκλου τινὸς τοῦ ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, τῶν κ, δ σημείων ὄντων, καθ' ἃ ἅπτονται τοῦ α β γ δ κύκλου αἱ δύο πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου,



διῃρημένης δὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν κ δ ὀρθοῦ πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον. καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, διαιρεθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. καὶ φανερὸν ὅτι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν

πέρας ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν κλ, ὀρθοῦ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης. ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἡ περιλαμβανομένη τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν.

κη Τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, ἐγγέγραπται εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν. τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, δέδεικται ὅτι τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινουσῶν. δῆλον οὖν ἐστι τὸ προειρημένον.

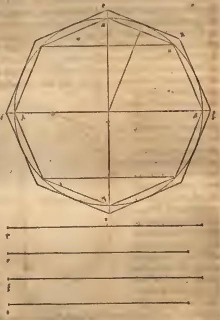
κθ Τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔστω γὰρ ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κύκλος καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον προκειμένοις. καὶ ὁ λ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ προκειμένου περιγεγραμμένου περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ εζηθ κύκλῳ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγέγραπται, καὶ ἀρτιογώνιον, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ πολυγώνου πλευρὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ θζ, πρὸς τὴν ζθ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ κθ πρὸς κζ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ζθκ. ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ζθκ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου τῆς θκ. ἡ δὲ θκ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ αβγδ κύκλου. διπλασία γάρ ἐστι τῆς χς, οὔσης ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβγδ κύκλου. δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος ὁ λ κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ.



Τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, ἐγγέγραπται ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ. τῷ δὲ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν, δέδεικται ἴσος κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένην. αὕτη δὲ ἐστὶν ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. δῆλον οὖν ἐστι τὸ προτεθέν. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν μεῖζόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ γὰρ ἴσος ἐστὶ τῷ σχήματι κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένην, τουτέστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἔστι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν μείζων ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν

ἐν τῇ σφαίρᾳ. μεῖζον ἄρα ἢ τετραπλάσιον ἔσται τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν τοῦ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ κῶνος ἴσος αὐτῷ, μείζων ἢ τετραπλάσιος γίνεται τοῦ εἰρημένου. βάσιν τε γὰρ μείζονα, ἢ τετραπλασίαν ἔχει, καὶ ὕψος ἴσον.

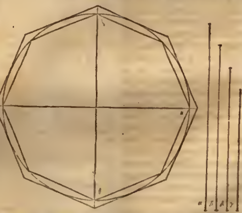
Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ σχῆμα ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὑπὸ ὁμοίων πολυγώνων, κ
τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον κατεσκευασμένοις, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐπιφάνειαν, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου περὶ τὸν μέγιστον κύκλον, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ. αὐτὸ δὲ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον, τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον. τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. καὶ ἄλλο περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον, ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. αἱ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευραὶ ἐπιψαυέτωσαν τοῦ κύκλου κατὰ μέσα τῶν περιφερειῶν τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου πλευρῶν. αἱ δὲ ε η, ζ θ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἀλλήλαις τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ ὁμοίως κείμεναι ταῖς α γ, β δ διαμέτροις, καὶ νοείσθωσαν ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰς ἀπεναντίον γωνίας τοῦ πολυγώνου, αἳ γίγνονται ἀλλήλαις τε καὶ τῇ β ζ, θ δ παράλληλοι, μενούσης δὲ τῆς ε η διαμέτρου, καὶ περιενεχθεισῶν τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. τὸ μὲν περιγεγραμμένον σχῆμα ἔσται ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον. δεικτέον οὖν ὅτι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ. τὸ δὲ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ ὁ μὲν μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν. ὁ δὲ ν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου, δύναται ἄρα τοῦ μὲν μ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ε λ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, τὸ ὑπὸ τῆς α κ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου. καὶ ἐπεὶ ὅμοια ἐστὶ τὰ πολύγωνα, ὅμοια ἂν εἴη καὶ τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τουτέστι τῶν ἐπὶ τὰς γωνίας, ἢ τὰς πλευρὰς τῶν πολυγώνων. ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα ὃν ἔχουσιν αἱ τῶν πολυγώνων πλευραὶ δυνάμει. ἀλλὰ καὶ ὃν ἔχει λόγον τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τοῦτον ἔχουσιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν μ, ν κύκλων πρὸς ἀλλήλας δυνάμει. ὥστε καὶ αἱ τῶν μ, ν διάμετροι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς τῶν πολυγώνων πλευραῖς. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχουσι τῶν διαμέτρων, οἵτινες ἴσοι εἰσὶ ταῖς ἐπιφανείαις τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ὡς



τὴν

τὴν σφαῖραν, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ. εἰλήφθωσαν δὴ δύο κῶνοι οἱ ο, ξ. καὶ ἔστω ὁ μὲν ξ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν ξ κύκλον, ἴσον τῷ μ. ὁ δὲ ο, βάσιν ἔχων τὸν ο κύκλον, ἴσον τῷ ν, ὕψος δὲ ὁ μὲν ξ κῶνος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ο τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α κ κάθετον ἠγμένην. ἴσος ἄρα ὁ μὲν ξ κῶνος τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὴν σφαῖραν. ὁ δὲ ο τῷ ἐγγεγραμμένῳ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ε λ πρὸς α κ, ὃν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν α κ κάθετον ἠγμένην. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ὕψος τοῦ ξ κώνου, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ο κώνου, ὃν ἡ ε λ πρὸς α κ. ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν κύκλου λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε λ πρὸς α κ. τῶν ἄρα ξ, ο κώνων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τοῖς ὕψεσι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον. ὅμοιοι ἄρα εἰσί. καὶ διὰ τοῦτο τριπλασίονα λόγον ἔχει ὁ ξ κῶνος πρὸς τὸν ο κῶνον, ἤπερ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν κύκλου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ.

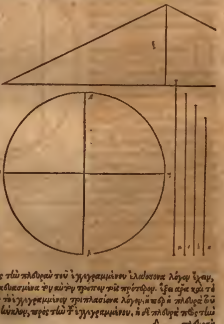
κα Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἔστω τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου ὁ α. λέγω ὅτι ὁ α ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον μείζων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ κύκλου. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, καὶ ὁ α κύκλος. δυνατὸν ἄρα ἐστὶ λαβεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα, λόγον ἔχειν ἐλάσσονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. εἰλήφθωσαν αἱ β, γ. καὶ τῶν β, γ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ δ. νοείσθω δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τετμημένη διὰ τοῦ κέντρου κατὰ τὸν ε ζ η θ κύκλον. νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον, ὥστε ὅμοιον εἶναι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ. καὶ τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ β πρὸς τὴν δ. καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα λόγος τοῦ διπλασίου λόγου ἐστὶν ἐλάσσων. καὶ τοῦ μὲν τῆς β πρὸς δ, διπλάσιός ἐστιν ὁ τῆς β πρὸς τὴν γ. τῆς δὲ πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου, διπλάσιος ὁ τῆς ἐπιφανείας περιγεγραμμένου στερεοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν α κύκλον. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ α κύκλου ἐλάσσων ἐστί. δέδεικται γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἢ τετραπλασία. τοῦ δὲ μεγίστου κύκλου τετραπλάσιός ἐστιν ὁ α κύκλος. οὐκ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μείζων ἐστὶ τοῦ α κύκλου. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω, καὶ ὁμοίως εὑρήσθωσαν αἱ β, γ εὐθεῖαι, ὥστε τὴν β πρὸς γ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καὶ τῶν β, γ μέση ἀνάλογον ἡ δ. καὶ ἐγγεγράφθω καὶ περιγεγράφθω πάλιν, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ τῆς β πρὸς δ, καὶ τὰ διπλάσια ἄρα. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν



γὰρ

του ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ τοῦ περιγεγραμμένου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ α κύκλου. ἡ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ α κύκλου. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ μείζων. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ τῷ α κύκλῳ, τουτέστι τῷ τετραπλασίῳ τοῦ μεγίστου κύκλου.

Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἡ σφαῖρα τετραπλασία τοῦ εἰρημένου κώνου, ἔστω εἰ δυνατὸν μείζων ἢ τετραπλασία. ἔστω δὲ ὁ ξ κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τετραπλασίαν τοῦ α β γ δ κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. μείζων οὖν ἐστιν ἡ σφαῖρα τοῦ ξ κώνου. ἔσται δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κῶνος. δυνατὸν οὖν δύο εὐθείας λαβεῖν ἀνίσους, ὥστε ἔχειν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἐλάσσονα, τοῦ ὃν ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν ξ κῶνον. ἔστωσαν οὖν αἱ κ, η. αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν κ τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν α β γ δ κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, καθάπερ ἐπὶ τοῦ πρότερον. ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς ι. καὶ ἔστωσαν αἱ α γ, β δ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. εἰ οὖν μενούσης τῆς α γ διαμέτρου, περιενεχθείη τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ τὰ πολύγωνα, ἔσται τὸ σχῆμα τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον. καὶ ἕξει τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν α β γ δ κύκλον. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ κ πρὸς τὴν ι. ὥστε τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλασίονα τοῦ κ πρὸς ι. ἔχει δὲ καὶ ἡ κ πρὸς η μείζονα λόγον, ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς ι. τοῦτο γὰρ φανερὸν διὰ λημμάτων. πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς η. ἡ δὲ κ πρὸς η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν ξ κῶνον, καὶ ἐναλλὰξ, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ γὰρ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον μεῖζόν ἐστι τῆς σφαίρας. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ ξ κώνου. διὰ τὸ ὁ μὲν ξ κῶνος τετραπλάσιος ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ α β γ δ κύκλῳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ εἰρημένου κώνου, ἢ τετραπλάσιον. οὐκ ἄρα μείζων ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ εἰρημένου. ἔστω εἰ δυνατὸν ἐλάσσων ἢ τετραπλασία, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ ξ κώνου. εἰλήφθωσαν δὴ αἱ κ, η εὐθεῖαι, ὥστε τὴν κ μείζονα εἶναι τῆς η, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν πρὸς αὐτὴν, τοῦ ὃν ἔχει ὁ ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν. καὶ αἱ θ, ι ἐκκείσθωσαν καθὼς πρότερον, καὶ εἰς τὸν α β γ δ κύκλον νοείσθω πολύγωνον ἐγγεγραμμένον. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον. ὥστε τὴν

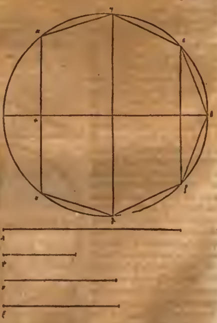


πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ἡ κ πρὸς ι. καὶ τὰ ἄλλα κατεσκευασμένα τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον. ἕξει ἄρα καὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν α β γ δ κύκλον, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν

δ πλευρὰν

πλευραὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ πρὸς ι. ἕξει οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἐλάσσονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς τὴν ι. ἡ δὲ κ πρὸς τὴν η μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς τὴν ι. ὥστε ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ἡ κ πρὸς τὴν η. ἡ δὲ κ πρὸς τὴν η, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ ἐγγεγραμμένον ἔλασσόν ἐστι τῆς σφαίρας, τὸ δὲ περιγεγραμμένον μεῖζον τοῦ ξ κώνου. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ α β γ δ κύκλῳ. ὕψος δὲ τὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων, τετραπλασία ἄρα.

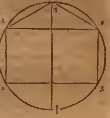
Προδεδειγμένων δὲ τούτων, φανερὸν ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. ὁ μὲν γὰρ κύλινδρος ὁ περιειρημένος ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα. δῆλον οὖν, ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. πάλιν ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνὰ λόγον ἐστὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου περὶ τὴν σφαῖραν, ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, δῆλον ὅτι ἡ μέση αὐτῶν ἀνὰ λόγον, ἴση γίνεται τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως. ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, τετραπλάσιός ἐστι τῆς βάσεως τῆς τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων, τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἑξαπλασία ἔσται τοῦ μεγίστου κύκλου. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.



κγ Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ τμήματι τοῦ μεγίστου κύκλου, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς παραλλήλοις τῇ βάσει τοῦ τμήματος, σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ τμήματος βάσεως. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ τμῆμα, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν α η κύκλος. ἐγγεγράφθω σχῆμα εἰς αὐτὸ οἷον εἴρηται, περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν. καὶ μέγιστος κύκλος ὁ α γ θ. καὶ ἀρτιόπλευρον πολύγωνον τὸ α γ ε θ ζ δ η χωρὶς τῆς α η πλευρᾶς. καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ λ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς α γ πλευρᾶς, καὶ ὑπὸ πασῶν τῶν ε ζ, γ δ. καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως, τουτέστι τῆς α κ. δεικτέον οὖν, ὅτι ὁ λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. εἰλήφθω γὰρ κύκλος ὁ μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε θ πλευρᾶς, καὶ τῆς ἡμισείας

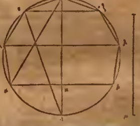
μισείας τῆς εζ. γίνεται δὲ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν εζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ θ σημεῖον. εἰλήφθω δὲ καὶ ἄλλος ὁ ν. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς εγ. καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς εζ, γδ. ἔσται οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ἐπὶ τὰς εζ, γδ. καὶ ἄλλος ὁμοίως ὁ ξ εἰλήφθω κύκλος. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αγ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῶν γδ, ακ. καὶ αὐτὸς ὢν ἴσος ἐστὶ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τοῦ ἐπὶ τὰς αθ, γδ. πάντες οὖν οἱ κύκλοι ἴσοι ἔσονται τῇ ὅλῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσον δυνάσονται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς αγ, καὶ τῆς ἴσης ταῖς εζ, γδ. καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως τῇ ακ. ἐδύνατο δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου, ἴσον τῷ αὐτῷ χωρίῳ. ὁ ἄρα λ κύκλος ἴσος ἔσται τοῖς μ, ν, ξ κύκλοις. ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος.

Τετμήσθω σφαῖρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αεζ, τέμνων λδ πρὸς ὀρθὰς τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ αβγ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόγωνον, χωρὶς τῆς βάσεως τῆς αβ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐὰν μενούσης τῆς γζ περιενεχθῇ τὸ σχῆμα, αἱ μὲν δ, ε, α, β γωνίαι ἐπὶ κύκλων οἰσθήσονται, ὧν διάμετροι αἱ δε, αβ. αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τμήματος, ἐπὶ κωνικῆς ἐπιφανείας. καὶ ἔσται τὸ γενηθὲν σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, βάσιν μὲν ἔχον κύκλον οὗ διάμετρος ἡ αβ, κορυφὴ δὲ τὸ γ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον τὴν ἐπιφάνειαν ἐλάσσονα ἕξει, τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τοῦ περιλαμβάνοντος. τὸ γὰρ αὐτὸ πέρας αὐτῶν ἐστιν ἐν ἐπιπέδῳ τοῦ τε τμήματος, καὶ τοῦ σχήματος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ αβ. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι ἀμφότεραι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας.



Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβεζ. καὶ λε

ἔστω τμῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν αβ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τὸ εἰρημένον σχῆμα. καὶ ἐν τῷ τμήματι τοῦ κύκλου πολύγωνον, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτά, διαμέτρου μὲν τῆς σφαίρας οὔσης τῆς θλ. ἐπεζευγμένων δὲ τῶν λε, θα. καὶ ἔστω κύκλος ὁ μ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ αθ. δεικτέον ὅτι ὁ μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ σχήματος ἐπιφανείας. ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος δέδεικται ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς εθ, καὶ τῶν εζ, γδ, κα. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς εθ, καὶ τῶν εζ, γδ, κα δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ελ, κθ περιεχομένῳ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ελ, κθ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αθ. καὶ γὰρ τοῦ



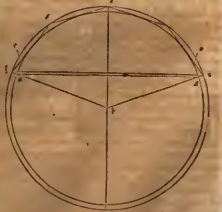
ὑπὸ λθ, θκ, ἴσου ὄντος τῷ ἀπὸ θα. φανερὸν οὖν ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ. δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος.

Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν ἔχοντι τῷ σχήματι, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένην. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ αβγ. καὶ κέντρον τὸ ε. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ αβγ τμῆμα πολύγωνον ἀρτιόπλευρον χωρὶς τῆς αγ, ὁμοίως τοῖς πρότερον. καὶ μενούσης τῆς βε περιενεχθεῖσα ἡ σφαῖρα ποιείτω σχῆμά τι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν αγ, κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον. καὶ εἰλήφθω κῶνος ὁ κ, βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ ε κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένην. δεικτέον ὅτι ὁ κ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ σχήματι, σὺν τῷ κώνῳ τῷ αεγ. ἀναγ- λς

γεγράφθωσαν δὲ καὶ κῶνοι ἀπὸ τῶν κύκλων τῶν περὶ διαμέτρους τὰς κ θ, ζ λ, κορυφὴν ἔχοντες τὸ ε σημεῖον. ἔσται δὴ ὁ μὲν ε β θ ῥόμβος στερεὸς ἴσος τινὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κ β θ κώνου, τὸ ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν κ β ἀγομένῃ καθέτῳ. τὸ δὲ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς κ θ, ζ λ, καὶ τῆς κωνικῆς τῶν ζ ε λ, κ ε θ, ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ βάσις μὲν ἐστὶν ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς κ θ, ζ λ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν ζ κ καθέτῳ ἀγομένῃ. πάλιν τὸ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ζ λ, α γ, καὶ τῆς κωνικῆς τῶν α ε γ, ζ ε λ, ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ζ λ, α γ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν ζ α καθέτῳ ἀγομένῃ. οἱ οὖν εἰρημένοι κῶνοι ἴσοι ἔσονται τῷ σχήματι, καὶ μετὰ τοῦ α ε γ κώνου. καὶ ὕψος μὲν ἴσον ἔχουσι τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἀγομένῃ. τὰς δὲ βάσεις ἴσας τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α ζ κ β λ γ σχήματος. ἔχει δὲ καὶ ὁ ξ κῶνος τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ εἰρημένοι κῶνοι ἐδείχθησαν ἴσοι τῷ σχήματι, καὶ τῷ α ε γ κώνῳ. καὶ ὁ ξ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τε σχήματι, καὶ τῷ ε α γ κώνῳ. ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἀγομένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, μείζων ἐστὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος σὺν τῷ κώνῳ. ὁ γὰρ προειρημένος κῶνος μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ ἴσου τῷ σχήματι, σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὴν δὲ κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, τουτέστι τὴν βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἀγομένῃ. ἥ τε γὰρ βάσις τῆς βάσεως μείζων ἐστί. δέδεικται γὰρ τοῦτο, καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὕψους.



λζ ΕΣΤΩ σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ. καὶ τετμήσθω ἔλασσον ἡμικυκλίου ἀποτετμημένη ἡ α β. καὶ κέντρον τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δ ἐπὶ τὰ α β ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, δ β. καὶ περὶ τὸν γενηθέντα τομέα περιγεγράφθω πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος. ἔσται δὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ α β γ κύκλῳ. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ε κ, περιενεχθὲν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος ἐπὶ ἐπιφανείας οἰσθήσεται σφαίρας. καὶ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου κύκλους γράψουσιν, ὧν αἱ διάμετροι ἐπιζευγνύουσι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὖσαι



παράλληλο

παράλληλοι τῇ α β τὰ δὲ σημεῖα καθ' ἃ ἅπτονται τοῦ ἐλάσσονος κύκλου αἱ τοῦ πολυγώνου πλευραί, κύκλους γράφουσιν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, ὧν διάμετροι ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἁφάς, παράλληλοι οὖσαι τῇ α β. αἱ δὲ πλευραὶ ἐπὶ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται. καὶ ἔσται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ζ η κύκλος. ἡ δὲ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ἐπιφανείας. οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν α β κύκλος. ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι αἱ α μ, β ν. ἐπὶ κωνικῆς ἄρα ἐπιφανείας οἰσθήσονται, καὶ τὸ σχῆμα τὸ γενηθὲν ὑπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ α μ θ ε ν β ἕξει μείζονα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας. οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλος ἐστί. τὰ γὰρ πέρατα ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ὄντα ἔχουσιν τὴν περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλον. καὶ περιλαμβάνεται τὸ τμῆμα ὑπὸ τοῦ σχήματος. ἀλλ' ἡ γεγενημένη ὑπὸ τῶν ζ μ, η ν ἐπιφάνεια κώνου, μείζων ἐστὶ τῆς γεγενημένης ὑπὸ τῶν μ α, ν β. ἡ μὲν γὰρ ζ μ τῆς μ α μείζων ἐστί. ὑπὸ γὰρ ὀρθὴν ὑποτείνει. ἡ δὲ ν η τῆς ν β. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ταῦτα γὰρ δέδεικται ἐν τοῖς λήμμασι. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. καὶ φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ περὶ τὸν τομέα, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν πασῶν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ἐπὶ ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ εἰρημένου πολυγώνου. * ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας τοῦτο δὲ δῆλον, διὰ τὸ περιγεγραμμένον.

Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ κύκλου. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἠγμένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. κη
ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ μέγιστος κύκλος ἐπ' αὐτῆς ὁ α β γ δ. καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ περὶ τὸν τομέα περιγεγράφθω τὸ λ κ ζ πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος περιγεγράφθω. καὶ γεγενήσθω σχῆμα, καθάπερ πρότερον. καὶ ἔστω κύκλος ὁ ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς κ λ. ἀλλὰ τὸ εἰρημένον χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς μ θ καὶ ζ η. ὁ δὲ ἐστὶν ὕψος τοῦ τμήματος τῆς μείζονος σφαίρας. τοῦτο γὰρ προδέδεικται. τοῦ ἄρα ν κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ μ θ, η ζ περιεχομένῳ. ἀλλ' ἡ μὲν η ζ μείζων ἐστὶ τῆς δ ξ, ὅ ἐστιν ὕψος τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὴν κ ζ, ἔσται παράλληλος τῇ δ α. ἔστι δὲ καὶ ἡ α β τῇ κ λ παράλληλος. καὶ κοινὴ ἡ ζ ε. ὅμοιον ἄρα τὸ ζ κ η τρίγωνον, τῷ δ α ξ τριγώνῳ. καὶ ἔστι μείζων ἡ ζ κ τῆς α δ. μείζων ἄρα καὶ ἡ ζ η τῆς δ ξ. ἴση δὲ ἡ μ θ τῇ διαμέτρῳ τῇ γ δ. ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ε κ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν μ ο τῇ ο ζ, ἡ δὲ θ ε τῇ ε ζ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ε ο τῇ μ θ. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ μ θ τῆς ε ο. ἀλλὰ καὶ ἡ γ δ διπλασία ἐστὶ τῆς ε ο. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μ θ τῇ γ δ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γ δ, δ ξ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α δ.



ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ κ ζ λ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τοῦ περὶ διάμετρον τὴν α β. ὁ γὰρ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν τομέα σχήματος.

Γίνεται δὲ καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸν τομέα σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διά- κθ
μετρον τὴν κ λ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον, ἴσον κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν πλευρὰν καθέτῳ ἠγμένῃ, ἣ δὴ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα τῷ τομεῖ, ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆ-

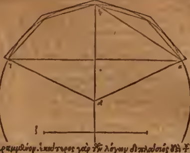
μα τῆς μείζονος σφαίρας, ἧς κέντρον ἐστὶ τὸ αὐτό. δῆλον οὖν τὸ λεγόμενον ἐστὶν ἐκ τοῦ προγεγραμμένου. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ μεῖζόν ἐστι κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ὁ γὰρ ἴσος κῶνος τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τὴν μὲν βάσιν μείζονα ἕξει τοῦ εἰρημένου κύκλου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἔστω πάλιν σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ αβγ. καὶ κέντρον τὸ δ. καὶ εἰς τὸν αβγ τομέα ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον, καὶ τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, καὶ παράλληλοι ἔστωσαν αἱ πλευραὶ ταῖς πλευραῖς. καὶ κύκλος περιγεγράφθω περὶ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον. καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον μενούσης τῆς ηβ περιενεχθέντες οἱ κύκλοι, ποιείτωσαν σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, δεικτέον ὅτι ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνειαν, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. τὸ δὲ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ. ἔστω γὰρ ὁ μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας, καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς εζ. ἔσται δὴ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. εἰλήφθω δὴ καὶ ὁ μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς αγ. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία ἐστὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εκ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ πλευρᾶς. καὶ ὡς ἄρα τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν κύκλον. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εκ πρὸς τὴν αλ. τὸν δὲ αὐτόν, ὃν καὶ τὸ πολύγωνον. ἔστω πάλιν κῶνος ὁ ξ, βάσιν μὲν ἔχων τῷ μ ἴσην, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἴσος δὴ οὗτος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν εζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ. καὶ ἔστω ἄλλος κῶνος ὁ ο, βάσιν μὲν ἴσην ἔχων τῷ ν. ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν αλ, κάθετον ἠγμένην. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν αγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ κέντρον. ταῦτα γὰρ πάντα προγέγραπται. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ὡς ἡ αλ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δ, ἐπὶ τὴν αλ κάθετον ἠγμένην. ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν αλ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. καὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. ἔσται ἄρα ὡς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ ξ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ ο. οὕτω τὸ ὕψος τοῦ ξ κώνου, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ο κώνου. ὅμοιοι εἰσὶν οἱ κῶνοι. ὁ ξ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ο κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εκ πρὸς αλ.



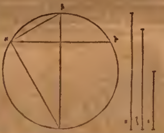
μ Παντὸς τμήματος σφαίρας, ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας. ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ αβγ. καὶ τμῆμα ἐν αὐτῇ ἔλασσον ἡμισφαιρίου, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν αγ κύκλος, πρὸς ὀρθὰς ὢν τῷ αβγ κύκλῳ. καὶ εἰλήφθω

κύκλος

κύκλος ὁ ζ. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β. δεικτέον ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ τμήματος, ἴση ἐστὶ τῷ ζ κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζ κύκλου. καὶ εἰλήφθω τὸ δ κέντρον. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰ α, γ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν. καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ τμήματος, καὶ τοῦ ζ κύκλου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α β γ τομέα πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ ἄλλο τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. περιενεχθέντος δὴ τοῦ κύκλου ὡς καὶ πρότερον, ἔσται δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. ὧν τὸ μὲν περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον. καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἔσται ὡς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλασίος ἐστὶ τοῦ ὃν ἔχει τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρά, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευράν. ἀλλὰ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ εἰρημένου τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν ζ κύκλον. μείζων δὲ ἐστὶν ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος. καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια ἄρα μείζων ἐστὶ τοῦ ζ κύκλου, ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἡ εἰρημένη τοῦ σχήματος ἐπιφάνεια ἐλάσσων οὖσα τοῦ τηλικούτου κύκλου. ἔστω πάλιν ὁ κύκλος μείζων τῆς ἐπιφανείας. καὶ ὁμοίως περιγεγράφθω καὶ ἐγγεγράφθω ὅμοια πολύγωνα. καὶ τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ὁ κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος. οὐκ ἄρα μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζ κύκλου. ἐδείχθη δὲ ὡς οὐδὲ ἐλάσσων, ἴση ἄρα.

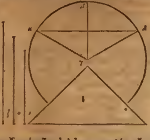


Ἐὰν μεῖζον ἡμισφαιρίου ᾖ τμῆμα, ὁμοίως αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μα
ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ νοείσθω τετμημένη ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, τῷ κατὰ τὴν α δ. καὶ τὸ α β δ ἔλασσον ἔστω ἡμισφαιρίου. καὶ διάμετρος ἡ β γ πρὸς ὀρθὰς τῇ α δ. καὶ ἀπὸ τῶν β γ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθωσαν αἱ β α, α γ. καὶ ἔστω ὁ μὲν ε κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β. ὁ δὲ ζ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α γ. ὁ δὲ η κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ γ β, καὶ ὁ η κύκλος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς δυσὶ κύκλοις τοῖς ε, ζ. ὁ δὲ η κύκλος ἴσος ἐστὶν ὅλῃ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἐπειδήπερ ἑκατέρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν β γ κύκλου. ὁ δὲ ε κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α β δ τμήματος. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου. λοιπὸς ἄρα ὁ ζ κύκλος, ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ α γ δ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ὃ δή ἐστι μεῖζον ἡμισφαιρίου.



Παντὶ τομεῖ σφαίρας, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βά-
σιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δὲ ἴσον μβ
τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β δ, καὶ κέντρον τὸ γ. καὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν ἴσον τῇ κατὰ τὴν α β δ περιφέρειαν ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ β γ. δεικτέον ὅτι ὁ τομεὺς ὁ α β γ δ ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ κώνῳ. εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ὁ τομεὺς τοῦ κώνου. καὶ κείσθω ὁ θ κῶνος, οἷος εἴρηται. δύο δὴ μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τοῦ τομέως καὶ τοῦ θ κώνου, εὑρήσθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ δ, ε. μείζων δὲ ἡ δ τῆς ε, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἡ δ πρὸς ε, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ εἰλήφθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ ζ, η. ὅπως τῷ ἴσῳ ὑπερέχῃ ἡ δ τῆς ζ, καὶ ἡ ζ τῆς η, καὶ ἡ η τῆς ε. καὶ περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα τοῦ κύκλου περιγεγράφθω πολύ-
γωνον

γωνον ἰσόπλευρον, καὶ ἀρτιογώνιον. καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω. ὥστε ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰ ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς ζ. καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον περιενεχθέντος τοῦ κύκλου, γεγενήσθω δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον, σὺν τῷ κώνῳ τῷ κορυφὴν ἔχοντι τὸ γ σημεῖον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἀλλὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ζ. ἐλάσσονα λόγον ἄρα ἕξει, ἢ τριπλάσιον, τὸ εἰρημένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τῆς δ πρὸς ζ. ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλάσιον τοῦ τῆς δ πρὸς ζ. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σχῆμα στερεὸν τῷ τομεῖ, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον τῷ τομεῖ σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. καὶ



ἐναλλάξ. μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τμήματος. καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα σχῆμα ἐν τῷ τομεῖ, μεῖζόν ἐστι τοῦ θ κώνου. ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς ἄνω, ἔλασσον ὂν τοῦ τηλικούτου κώνου, τουτέστι τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. οὗτος δέ ἐστιν ὁ εἰρημένος κῶνος ὁ θ. βάσιν τε γὰρ ἔχει κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος, τουτέστι τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. οὐκ ἄρα ὁ στερεὸς τομεὺς μείζων ἐστὶ τοῦ θ κώνου. ἔστω δὴ πάλιν ὁ θ κῶνος τοῦ στερεοῦ τομέως μείζων. πάλιν δὴ ὁμοίως ἡ δ πρὸς τὴν ε μείζων αὐτῆς οὖσα, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ὁ κῶνος πρὸς τὸν τομέα. καὶ ὁμοίως εἰλήφθωσαν αἱ ζ, η. ὥστε εἶναι τὰς δύο πλευρὰς τὰς αὐτάς, καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα πολυγώνου ἀρτιογωνίου ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς τὴν ζ. καὶ γεγενήσθω τὰ περὶ τὸν στερεὸν τομέα στερεὰ σχήματα. ὁμοίως οὖν δείξομεν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν τομέα στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἡ δ πρὸς ε. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ θ κῶνος πρὸς τὸν τομέα. ὥστε καὶ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν ἐν τῷ τμήματι πρὸς τὸ περιγεγραμμένον. μείζων δέ ἐστιν ὁ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν σχήματος. μείζων ἄρα ὁ θ κῶνος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ πρότερον, ὅτι ὁ τηλικοῦτος κῶνος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὸν τομέα. ἴσος ἄρα ὁ τομεὺς τῷ θ κώνῳ.

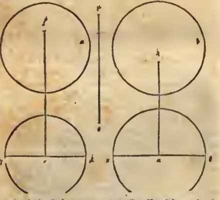
Ἀρχιμήδους

ἈΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΝ Β.

ἈΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΧΑΙΡΕΙΝ.

Πρότερον μὲν ἀπέστειλάς μοι γράψαι τῶν προβλημάτων τὰς ἀποδείξεις, ὧν αὐτὸς τὰς προτάσεις ἀπέστειλα Κόνωνι. συμβαίνει δὲ αὐτῶν τὰ πλεῖστα γράφεσθαι διὰ τῶν θεωρημάτων, ὧν πρότερον ἀπέσταλκά σοι τὰς ἀποδείξεις. ὅτι τε πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, καὶ δὴ ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένῃ. καὶ διότι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, αὐτός τε ἡμιόλιος ἐστι τῷ μεγέθει τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. καὶ διότι πᾶς τομεὺς στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ ἐν τῷ τομεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὅσα μὲν οὖν τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων γράφεται διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀπέσταλκά σοι. ὅσα δὲ δι' ἄλλης εὑρίσκονται θεωρίας, τά τε περὶ ἑλίκων καὶ τὰ περὶ τῶν κωνοειδῶν, πειράσομαι διὰ τάχους ἀποστεῖλαι. τὸ δὲ πρῶτον ἦν τῶν προβλημάτων τόδε· σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν, ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν, δεδειγμένον ἐκ τῶν προειρημένων θεωρημάτων. τὸ γὰρ τετραπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἐπίπεδόν τε χωρίον ἐστὶ, καὶ ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

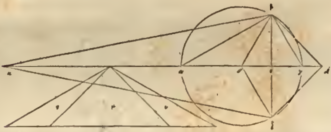
Τὸ δεύτερον ἦν· κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ ἴσην. ἔστω ὁ δεδομένος κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ α, καὶ τῷ α ἴση ἡ β σφαῖρα. καὶ κείσθω τοῦ α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος ὁ γζδ. τῆς δὲ β σφαίρας ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ηθ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ κλ ἴσος τῇ διαμέτρῳ τῆς β σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. τῶν δὲ ἴσων κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς ἄρα ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, οὕτως ἡ α



κλ πρὸς εζ. ἴση δὲ ἡ κλ τῇ ηθ. ὁ γὰρ ἡμιόλιος κύλινδρος τῆς σφαίρας ἴσον ἔχει τὸν ἄξονα τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας. καὶ ὁ κ κύκλος μέγιστός ἐστι τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ ηθ, οὕτως ἡ ηθ πρὸς τὴν εζ. ἔστω τῷ ἀπὸ ηθ ἴσον τὸ ὑπὸ γδ, μν. ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς μν, οὕτως τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ ηθ. τουτέστιν ἡ ηθ πρὸς εζ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ γδ πρὸς τὴν ηθ, οὕτως ἡ ηθ πρὸς τὴν μν, καὶ ἡ μν πρὸς εζ. καὶ ἐστι δοθεῖσα ἑκατέρα τῶν γδ, εζ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν γδ, εζ, δύο μέσαι ἀνὰ λόγον εἰσὶν αἱ ηθ, μν. δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν ηθ, μν. συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ α. δεῖ δὴ τῷ α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἴσην σφαῖραν εὑρεῖν. ἔστω τοῦ α κώνου, ἢ κυλίνδρου, ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ εζ. καὶ εἰλήφθω τῶν γδ, εζ δύο μέσαι ἀνὰ λόγον, αἱ ηθ, μν. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γδ πρὸς τὴν ηθ, οὕτω τὴν ηθ πρὸς τὴν μν, καὶ τὴν μν πρὸς τὴν εζ. καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ηθ κύκλος. ἄξων δὲ ὁ κλ ἴσος τῇ ηθ διαμέτρῳ. λέγω δὴ ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ γδ πρὸς ηθ, ἡ μν πρὸς εζ. καὶ ἐναλλάξ, καὶ ἴση ἡ ηθ τῇ κλ. ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς μν, τουτέστιν

τέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ, οὕτως ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον. ὡς ἄρα ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον, οὕτως ἡ κλ πρὸς τὴν εζ. τῶν ἄρα ε, κ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. ὁ δὲ κ κύλινδρος τῆς σφαίρας, ἧς διάμετρος ἡ ηθ ἡμιόλιός ἐστι. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ἧς ἡ διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ηθ, τουτέστιν ἡ β, ἴση ἐστὶ τῷ α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ.

β Παντὶ τμήματι τῆς σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος οὗ διάμετρος ἡ αγ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ σφαῖρα, τῷ διὰ τῆς βζ πρὸς ὀρθὰς τῇ αγ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ θ. καὶ πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ θα, αε, πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ δε πρὸς γε. καὶ πάλιν πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ θγ, γε πρὸς γε, οὕτως ἡ κε πρὸς εα. καὶ ἀναγεγράφθωσαν κῶνοι ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βζ, κορυφὰς ἔχοντες τὰ κ, δ σημεῖα. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν βδζ κῶνος, τῷ κατὰ τὸ γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ βκζ τῷ κατὰ τὸ α σημεῖον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βθ, θζ, καὶ νενοήσθω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. κορυφὴν δὲ τὸ θ σημεῖον. καὶ ἔστω κῶνος ὁ μ, βάσιν μὲν ἔχων κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βγζ τμήματος τῆς σφαίρας. τουτέστιν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βγ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστι δὴ ὁ μ κῶνος ἴσος τῷ βγθζ στερεῷ τομεῖ. τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς ἡ δε πρὸς εγ, οὕτως συναμφότερος ἡ θα, αε. πρὸς αε διελόντι ἔσται ὡς ἡ γδ πρὸς γε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς αε. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ δγ πρὸς

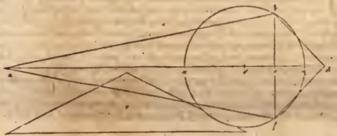


γθ ἐστὶν, οὕτως ἡ γε πρὸς εα. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ θδ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε, τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς ἄρα ἡ δθ πρὸς γθ, τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ γβ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου. ἡ δὲ βε ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τῆς βζ κύκλου. ὡς ἄρα ἡ δθ πρὸς θγ, ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. καὶ ἔστιν ἴση ἡ θγ τῷ ἄξονι τοῦ μ κώνου. καὶ ὡς ἄρα ἡ δθ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μ κώνου. οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ἴσος ἄρα ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῷ βδζθ στερεῷ ῥόμβῳ. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς λήμμασι τοῦ πρώτου βιβλίου δέδεικται. ἢ οὕτως, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ μ κώνου, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ἴσος ἄρα ὁ μ κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ὕψος δὲ ἡ δθ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ' ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τῆς βζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν δθ. ἴσος ἐστὶ τῷ βδζθ στερεῷ ῥόμβῳ. ἀλλ' ὁ μ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ βγζθ στερεῷ τομεῖ, καὶ ὁ βγζθ στερεὸς τομεὺς ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ βδζθ στερεῷ ῥόμβῳ. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ εθ, λοιπὸς ἄρα ὁ βδζ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ βζγ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ βκζ κῶνος, ἴσος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος, ἡ θγ, γε πρὸς γε, οὕτως ἡ κε πρὸς εα. διελόντι ἄρα ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ θγ πρὸς γε. ἴση δὲ ἡ θγ τῇ θα. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ κα πρὸς αθ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ὥστε καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κθ πρὸς θα, ἡ αγ πρὸς γε, τουτέστι τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ βε. κείσθω δὴ πάλιν κύκλος ὁ ν, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ αβ. ὁ ἄρα ν κύκλος ἴσος

ἐστὶ

ἴσαι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος. καὶ νοείσθω ὁ κῶνος ὁ ν, ἴσον ἔχων τὸ ὕψος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἴσος ἄρα ἐστὶν τῷ βθζα στερεῷ τομεῖ. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ κθ πρὸς θα, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλου, τουτέστιν ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. ἴση δὲ ἡ αθ τῷ ὕψει τοῦ ν κώνου. ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου, οὕτως ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ βθζα τομεὺς τῷ βθζκ σχήματι. κοινὸς προσκείσθω ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ εθ. ὅλον ἄρα τὸ αβζ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶν τῷ βζκ κώνῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ φανερὸν ὅτι γίγνεται καθόλου τμῆμα σφαίρας πρὸς κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι. καὶ ὕψος ἴσον, ὡς συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ κάθετος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὴν κάθετον τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὡς γὰρ ἡ δε πρὸς εγ, οὕτως ὁ δζβ κῶνος, τουτέστι τὸ βγζ τμῆμα πρὸς τὸν βγζ κῶνον.

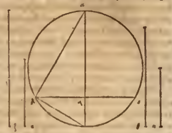
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, δείξομεν ὅτι καὶ ὁ κβζ κῶνος ἴσος ἐστὶν τῷ αζβ τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ ν κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τῇ σφαίρᾳ. ἡ γὰρ σφαῖρα δέδεικται τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ν κῶνος τοῦ αὐτοῦ ἐστι τετραπλάσιος. ἐπεὶ καὶ ἡ βάσις τῆς βάσεως, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θα, αε πρὸς αε, ἡ δε πρὸς εγ. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ θγ πρὸς γδ, ἡ αε πρὸς εγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κε πρὸς εα, συναμφότερος ἡ θγ, γε πρὸς γε. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κα πρὸς γθ, τουτέστι πρὸς θα, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ, τουτέστιν ἡ θγ πρὸς γδ. καὶ συνθέντι, ἴση δὲ ἡ αθ τῇ θγ, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ. καὶ ὅλη ἡ κδ πρὸς δθ ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς δγ. τουτέστιν ὡς ἡ κθ



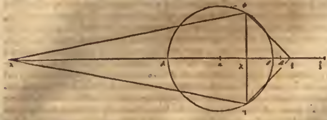
πρὸς θα. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ δθκ, θα τῷ ὑπὸ τῶν δκ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς γδ, ἐναλλὰξ ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ θγ πρὸς γδ. ὡς δὲ ἡ θγ πρὸς γδ, ἐδείχθη ἡ αε πρὸς εγ, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ αε πρὸς εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ὑπὸ κθδ, τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν κθδ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ κδ, αθ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κδ, αθ, τουτέστιν ἡ κδ πρὸς αθ, τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ αεγ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. καί ἐστιν ἴση ἡ αγ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ βε, τουτέστιν ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, οὕτως ἡ κδ πρὸς αθ. τουτέστιν ἡ κδ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τῷ βδζκ στερεῷ ῥόμβῳ. ἢ οὕτως· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, οὕτως ἡ κδ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ δκ. ἀντιπεπόνθασιν γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ' οὗτος ὁ κῶνος ἴσος ἐστὶν τῷ βκζδ στερεῷ ῥόμβῳ. καὶ ὁ ν ἄρα κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶν τῷ βζκδ στερεῷ ῥόμβῳ, ὧν ὁ βδζ κῶνος ἴσος ἐδείχθη τῷ βγζ τμήματι τῆς σφαίρας. λοιπὸς ἄρα ὁ βκζ κῶνος, ἴσος ἐστὶν τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας.

Τρίτον ἦν πρόβλημα τόδε. τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰς τῶν τμημάτων ἐπιφανείας πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. γεγονέτω, καὶ ἔστω τῆς σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ αδβε, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ αβ. καὶ ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν αβ ἐπίπε γ

δον ὀρθόν. καὶ ποιείτω τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ α δ β ε κύκλῳ τομὴν τὴν δ ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, β δ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ δ α ε τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δ β ε τμήματος. ἀλλὰ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ α ε τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α δ. τῇ δὲ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ β ε τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δ β. ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ β. τουτέστιν ἡ α γ πρὸς γ β. λόγος ἄρα τῆς α γ πρὸς γ β δοθείς, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. καὶ ἔστι τῇ α β πρὸς ὀρθὰς ἡ δ ε. θέσει ἄρα καὶ τὸ διὰ τῆς δ ε ἐπίπεδον. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ α β δ ε, καὶ διάμετρος ἡ α β. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ζ πρὸς η. καὶ τετμήσθω ἡ α β, κατὰ τὸ γ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν α γ πρὸς β γ, οὕτως τὴν ζ πρὸς η. καὶ διὰ τοῦ γ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ σφαῖρα πρὸς ὀρθὰς τῇ α β, εὐθείᾳ. καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ δ ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, δ β. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο κύκλοι οἱ θ, κ. ὁ μὲν θ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ α δ, ὁ δὲ κ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχων τῇ δ β. ἔστιν ἄρα ὁ μὲν θ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ α ε τμήματος. ὁ δὲ κ τοῦ δ β ε τμήματος. τοῦτο γὰρ προδέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ α δ β, καὶ κάθετος ἡ γ δ. ἔστιν ὡς ἡ α γ πρὸς γ β, τουτέστιν ἡ ζ πρὸς η, τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ β. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ θ κύκλου, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κ κύκλου. τουτέστιν ὁ θ κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δ α ε τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δ β ε τμήματος τῆς σφαίρας.



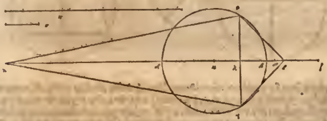
δ Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα ἡ α β γ δ. δεῖ δὴ αὐτὴν τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. τετμήσθω διὰ τῆς α γ ἐπιπέδῳ, λόγος ἄρα τοῦ α δ γ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας δοθείς. τετμήσθω δὲ ἡ σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω ἡ τομὴ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. κέντρον δὲ τὸ κ. καὶ διάμετρος ἡ δ β. καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ κ δ χ πρὸς δ χ, οὕτως ἡ ρ χ πρὸς χ β. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κ β χ πρὸς β χ, οὕτως ἡ λ χ πρὸς χ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α λ, λ γ, α ρ, ρ γ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν α λ γ κῶνος, τῷ α δ γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ α ρ γ, τῷ α β γ. λόγος ἄρα καὶ τοῦ α λ γ κώνου πρὸς τὸν α ρ γ κῶνον δοθείς. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ἡ λ χ πρὸς χ ρ. ἐπείπερ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουσι τὸν περὶ διάμετρον τὴν α γ κύκλον. λόγος ἄρα καὶ τῆς λ χ πρὸς χ ρ δοθείς. καὶ διὰ ταῦτα τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λ δ πρὸς κ δ, ἡ κ β πρὸς β ρ,



καὶ ἡ δ χ πρὸς χ β. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ρ β πρὸς β κ, ἡ κ δ πρὸς λ δ. συνθέντι ὡς ἡ ρ κ πρὸς κ β, τουτέστι πρὸς κ δ, οὕτως ἡ κ λ πρὸς λ δ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρ λ πρὸς ὅλην τὴν κ λ ἐστίν, ὡς ἡ κ λ πρὸς λ δ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ρ λ δ, τῷ ἀπὸ λ κ. ὡς ἄρα ἡ ρ λ πρὸς λ δ, τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ λ δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λ δ πρὸς δ κ, οὕτως ἡ δ χ πρὸς χ β. ἔσται ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κ λ πρὸς λ δ, οὕτως ἡ β δ πρὸς δ χ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ λ δ, οὕτω τὸ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ. πάλιν

πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ κχ πρὸς δχ, συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ. διελόντι, ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βχ. καὶ κεῖται τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τῆς ρ πεσεῖται, δῆλον. καὶ ἔσται ὡς ἡ λδ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ζβ πρὸς βχ. ὥστε καὶ ὡς ἡ δλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζχ. ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ δλ πρὸς λχ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ὡς δὲ ἡ δλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. ὁ ἄρα τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ ἡ βζ πρὸς ζχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. λόγος δὲ τῆς ρλ πρὸς λχ δοθείς, λόγος ἄρα καὶ τῆς ζβ πρὸς ζθ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ βζ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ζθ, καὶ ὁ τῆς βζ ἄρα λόγος πρὸς ζθ συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ ἡ βζ πρὸς ζχ. ἀλλ' ὁ βζ πρὸς ζθ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ χζ πρὸς ζθ, τουτέστι πρὸς δοθέν. καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ζδ εὐθεῖα. δεῖ ἄρα δοθεῖσαν τὴν δζ τεμεῖν κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν τὴν ζθ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τοῦτο οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων, τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ. καὶ τοῦ μείζονα τὴν ζθ τῆς βθ. ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν. καὶ ἔσται τὸ πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῆς δβ, βζ. καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ. καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεταί τε καὶ συντεθήσεται.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς π πρὸς σ μείζων πρὸς ἐλάσσονα. καὶ δεδόσθω τις σφαῖρα. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστω τομὴ ὁ αβγδ κύκλος, καὶ διάμετρος ἔστω ἡ βδ, κέντρον δὲ τὸ κ. καὶ τῇ κβ ἴση κείσθω ἡ βζ, καὶ τετμήσθω ἡ βζ κατὰ τὸ θ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν θζ πρὸς θβ, τὴν π πρὸς σ. καὶ ἔτι τετμήσθω ἡ βδ κατὰ τὸ χ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. καὶ διὰ τοῦ χ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν πρὸς τὴν βδ. λέγω ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν, ὥστε εἶναι ὡς τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, τὴν π πρὸς σ. πεποιήσθω γὰρ ὡς μὲν συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς

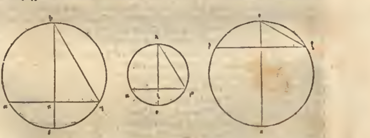


δχ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κδ, δχ πρὸς χδ, ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αλ, λγ, αρ, ργ. ἔσται δὴ διὰ τὴν κατασκευὴν ὡς ἐδείξαμεν ἐν τῇ ἀναλύσει, ἴσον τὸ ὑπὸ ρλδ τῷ ὑπὸ λκ. καὶ ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ρλ, λδ τῷ ἀπὸ λκ ἐστὶν ἴσον, ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τουτέστιν ἡ χζ πρὸς ζθ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἴση δέ ἐστιν ἡ κβ τῇ βζ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ δχ πρὸς χδ. ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. ὥστε καὶ ὡς ἡ λδ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως ἡ χζ πρὸς ζθ. ὡς δὲ ἡ δλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λχ πρὸς χρ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ ζθ πρὸς θβ, οὕτως ἡ π πρὸς σ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λχ πρὸς χρ, τουτέστιν ὁ αγλ κῶνος πρὸς τὸν αργ κῶ-

νον

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω τὸ μὲν δεῖ ἴσον τμῆμα συστήσασθαι τὸ α β γ. τὸ δὲ ὅμοιον τὸ ε ζ η. καὶ ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι τῶν σφαιρῶν οἱ α β γ ν, η ε ο ζ. διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ γ ν, η ο. καὶ κέντρα τὰ π, σ. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ π ν, ν τ πρὸς ν τ, οὕτως ἡ χ τ πρὸς τ γ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ σ ο, ο φ πρὸς ο φ, ἡ ω φ πρὸς φ η. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν χ α β κῶνος τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ ζ ω ε τῷ ε η ζ. πεποιήσθω ὡς ἡ ω φ πρὸς ε ζ, οὕτως ἡ χ τ πρὸς δ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν α β, δ, δύο μέσαι ἀνὰ λόγον εἰλήφθωσαν αἱ θ κ, ξ. ὥστε εἶναι, ὡς τὴν α β πρὸς θ κ, οὕτως τὴν κ θ πρὸς ξ, καὶ τὴν ξ πρὸς δ. καὶ ἐπὶ τῆς θ κ κύκλου τμῆμα ἐπεστάσθω τὸ θ κ λ, ὅμοιον τῷ ε ζ η κύκλου τμήματι, καὶ ἀναπεπληρώσθω ὁ κύκλος. καὶ ἔστω αὐτοῦ διάμετρος ἡ λ ξ. καὶ νοείσθω σφαῖρα ἧς μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ λ θ ξ κ, κέντρον δὲ τὸ ρ. καὶ διὰ τῆς θ κ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν λ ξ. ἔσται δὴ τὸ τμήματι τῆς σφαίρας τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ λ, ὅμοιον τῷ ε ζ η τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ καὶ τῶν κύκλων τὰ τμήματα ἦν ὅμοια, λέγω δὲ ὅτι καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας. πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ ρ ξ, ξ υ πρὸς τὴν ξ υ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς υ λ. ἴσος ἄρα ψ θ κ κῶνος, τῷ θ κ λ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπειδὴ ὅμοιός ἐστιν ὁ ψ θ κ κῶνος τῷ ζ ω ε κώνῳ, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ω φ πρὸς ε ζ, τουτέστιν ἡ χ τ πρὸς δ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς θ κ. καὶ ἐναλλὰξ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἄρα ἡ ψ υ πρὸς χ τ, ἡ θ κ πρὸς δ. καὶ ἐπειδὴ ἀνὰ λόγον εἰσὶν αἱ α θ, κ θ, ξ, δ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ἡ θ κ πρὸς δ. ὡς δὲ ἡ θ κ πρὸς δ, ἡ ψ υ πρὸς χ τ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ κ θ, τουτέστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν θ κ κύκλος, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς τὴν χ τ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ χ α β κῶνος τῷ ψ θ κ κώνῳ. ὥστε καὶ τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ θ κ λ τμήματι τῆς σφαίρας. τῷ δοθέντι ἄρα τμήματι τῷ α β γ ἴσον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ὅμοιον τῷ ε ζ η, τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ θ κ λ.

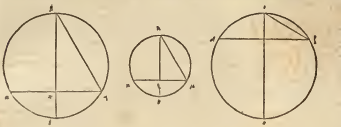
Δύο δοθέντων σφαίρας τμημάτων, εἴτε τῆς αὐτῆς, εἴτε μή, εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται ἑνὶ ς̄
μὲν τῶν δοθέντων ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἕξει ἴσην τῇ τοῦ ἑτέρου τμήματος ἐπιφανείᾳ. ἔστω τὰ δοθέντα τμήματα σφαιρικὰ ἐπὶ τὰς α β γ, δ ε ζ περιφερείας. καὶ ἔστω ᾧ μὲν δεῖ ὅμοιον εὑρεῖν τὸ ἐπὶ τὴν α β γ περιφέρειαν. οὗ δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ ἐπὶ τὴν δ ε ζ. καὶ γεγενήσθω καὶ ἔστω τὸ κ λ μ τῆς σφαίρας, τῷ μὲν α β γ τμήματι ὅμοιον. τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσην ἐχέτω τῇ τοῦ δ ε ζ τμήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ νοείσθω τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν. καὶ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω ὀρθὰ πρὸς τὰς τῶν τμημάτων βάσεις. καὶ ἐν μὲν ταῖς σφαίραις τομαὶ ἔστωσαν οἱ κ λ μ ν, β α γ θ, ε ζ η δ μέγιστοι κύκλοι. ἐν δὲ ταῖς βάσεσι τῶν τμημάτων, αἱ κ μ, α γ, δ ζ εὐθεῖαι. διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν πρὸς ὀρθὰς οὖσαι ταῖς κ μ, α γ, δ ζ, ἔστωσαν αἱ λ ν, β θ, ε η. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λ μ, β γ, ε ζ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κ λ μ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφά-



νεια τῇ τοῦ δ ε ζ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ε ζ. αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων ἴσαι εἰσὶ κύκλοις, ὧν αἱ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν τμημάτων ἐπὶ τὰς βάσεις ἐπιζευγνυμέναις. ὥστε καὶ ἡ μ λ τῇ ε ζ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ δὲ ὅμοιόν ἐστι τὸ κ λ μ τῷ α β γ τμήματι, ἔστιν ὡς ἡ ρ λ πρὸς ρ ν, ἡ β π πρὸς π θ. καὶ ἀνάπαλιν. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ν λ πρὸς λ ρ, οὕτως ἡ θ β πρὸς β π. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ρ λ πρὸς λ μ, οὕτως ἡ β π πρὸς γ β. ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ ν λ πρὸς λ μ, τουτέστι πρὸς ε ζ, οὕτως ἡ θ β πρὸς β γ. καὶ ἐναλλάξ. λόγος δὲ τῆς ε ζ πρὸς β γ δοθείς. δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα. λόγος ἄρα καὶ τῆς λ ν πρὸς β θ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ β θ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ λ ν, ὥστε καὶ ἡ σφαῖρα δοθεῖσά ἐστι.

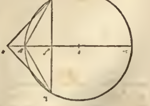
Συντεθήσεται

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστω τὰ δοθέντα δύο τμήματα σφαίρας, τὰ αβγ, δεζ. τὸ μὲν αβγ, ᾧ δεῖ ὅμοιον· τὸ δὲ δεζ, οὗ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχει τῇ ἐπιφανείᾳ. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως. καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν ἡ βγ πρὸς εζ, οὕτως ἡ βθ πρὸς λν. καὶ περὶ διάμετρον τὴν λν κύκλος γεγράφθω. καὶ νοείσθω σφαῖρα ἧς μέγιστος ἔστω κύκλος ὁ λκνμ. καὶ τετμήσθω ἡ νλ κατὰ τὸ ρ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν θπ πρὸς πβ, τὴν νρ πρὸς ρλ. καὶ διὰ τοῦ ρ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ ἐπιφάνεια ὀρθῷ πρὸς τὴν λν. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λμ. ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κμ, αγ



βάσεων τῶν κύκλων τμήματα, ὥστε καὶ τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν ἐστὶν ὅμοια. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θβ πρὸς βπ, οὕτως ἡ νλ πρὸς λρ. καὶ γὰρ τὰ κατὰ διαίρεσιν. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ πβ πρὸς βγ, οὕτως ἡ ρλ πρὸς λμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς νλ, ἡ βγ πρὸς λμ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ θβ πρὸς λν, ἡ βγ πρὸς εζ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ εζ τῇ λμ. ὥστε καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ εζ, ἴσος ἐστὶ κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λμ. καὶ ὁ μὲν τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων τὴν εζ κύκλος, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ τμήματος, ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λμ, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κλμ τμήματος. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. ἴση ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κλμ τμήματος τῆς σφαίρας, τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ τμήματος, καὶ ἐστὶν ὅμοιον τὸ κλμ τῷ αβγ.

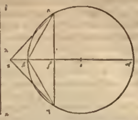
Ἀπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας τμῆμα τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον, τὸν δοθέντα λόγον ἔχειν. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ βδ. δεῖ δὴ τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν διὰ τῆς αγ, ὅπως τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν αβγ κῶνον λόγον ἔχῃ τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. γεγονέτω καὶ ἔστω κέντρον τῆς σφαίρας τὸ ε. καὶ ὡς συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ ηζ πρὸς ζβ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ αγη κῶνος τῷ αβγ τμήματι. λόγος ἄρα καὶ τοῦ αηγ κώνου πρὸς τὸν αβγ κῶνον δοθείς. λόγος ἄρα τῆς ηζ πρὸς ζβ δοθείς. ὡς δὲ ἡ ηζ πρὸς ζβ συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ. λόγος ἄρα συναμφοτέρου τῆς εδζ πρὸς δζ δοθείς, ὥστε καὶ τῆς εδ πρὸς δζ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δζ, ὥστε καὶ ἡ αγ. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. καί ἐστι συναμφότερος μὲν ἡ εδβ τρὶς ἡ εδ. ἡ δὲ βδ δὶς ἡ εδ. συναμφότερος ἄρα ἡ εδζ πρὸς δζ, μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. καί ἐστιν ὁ συναμφοτέρου τῆς εδζ πρὸς ζδ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ δοθέντι. δεῖ ἄρα τὸν διδόμενον λόγον εἰς τὴν σύνθεσιν μείζονα εἶναι, τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο.



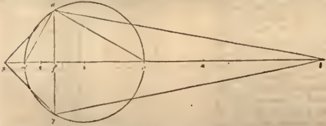
Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. διάμετρος δὲ ἡ βδ. κέντρον δὲ τὸ ε. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς κθ πρὸς κλ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. ἔστι δὲ ὡς τρία πρὸς δύο, συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. καὶ ἡ θκ ἄρα πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. διελόντι ἄρα ἡ θλ πρὸς λκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δβ. καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ θλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ εδ πρὸς δζ. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ βδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ αζγ. καὶ διὰ τῆς αγ ἤχ-

θω ἐπίπεδον

θω ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν β δ. λέγω ὅτι τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν α β γ κῶνον λόγον ἔχει τὸν αὐτὸν τῷ θ κ πρὸς κ λ. πεποιήσθω γὰρ ὡς συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ, οὕτως ἡ κ ζ πρὸς ζ β. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ γ α κ κῶνος τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ θ κ πρὸς κ λ, οὕτως συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ, τουτέστιν ἡ κ ζ πρὸς ζ β, τουτέστιν ὁ α κ γ κῶνος, πρὸς τὸν α β γ κῶνον. ἴσος δὲ ὁ α κ γ κῶνος τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὡς ἄρα τὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸν α β γ κῶνον, οὕτως ἡ θ κ πρὸς κ λ. η̄



Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ μείζονος τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐλάσσονος ἐπιφάνειαν. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ διάμετρος ἡ β δ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τῆς α γ ὀρθῷ πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον. καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ α β γ. λέγω ὅτι τὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ α δ γ, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ β α, α δ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ ε. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ, ἡ θ ζ πρὸς ζ β. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ε β ζ πρὸς β ζ, οὕτως ἡ

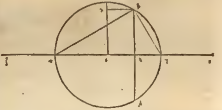


κ ζ πρὸς ζ δ. καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, βάσιν ἔχοντες τὸν περὶ διάμετρον τὴν α γ κύκλον, κορυφὰς δὲ τὰ θ, κ σημεῖα. ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν α θ γ κῶνος τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ α γ κ τῷ α δ γ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ β α πρὸς τὸ ἀπὸ α δ, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ α δ γ τμήματος. τοῦτο γὰρ προγέγραπται. δεικτέον ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. λέγω ὅτι καὶ ὁ α θ γ κῶνος πρὸς τὸν α κ γ, τουτέστιν ἡ ζ θ πρὸς ζ κ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ β α πρὸς τὸ ἀπὸ α δ, τουτέστιν ἡ β ζ πρὸς ζ δ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ, οὕτως ἡ θ ζ πρὸς ζ β. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ε β ζ πρὸς β ζ, οὕτως ἡ ζ κ πρὸς ζ δ. ἔσται καὶ ὡς ἡ β ζ πρὸς ζ δ, ἡ θ β πρὸς β ε. ἴση γὰρ ἡ β ε τῇ δ ε. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ἐπάνω συναποδέδεικται. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ε β ζ πρὸς β ζ, ἡ κ ζ πρὸς ζ δ. ἔστω τῇ β ε ἴση ἡ β κ. δῆλον γὰρ ὅτι μεῖζον ἐστὶν ἡ θ β τῆς β ε. ἐπεὶ καὶ ἡ β ζ τῆς ζ δ. καὶ ἔσται ὡς ἡ κ ζ πρὸς ζ β, ἡ κ ζ πρὸς ζ δ. ὡς δὲ ἡ ζ β πρὸς ζ δ, ἐδείχθη ἡ θ β πρὸς β ε. ἴση δὲ ἡ β ε τῇ κ β. ὡς ἄρα ἡ θ β πρὸς β κ, οὕτως ἡ κ ζ πρὸς ζ κ. καὶ ἐπεὶ ἡ θ ζ πρὸς ζ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θ β πρὸς β κ. ὡς δὲ ἡ θ β πρὸς β κ, ἐδείχθη ἡ κ ζ πρὸς ζ κ. ἡ θ ζ ἄρα πρὸς ζ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ ζ πρὸς ζ κ. ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θ ζ κ, τοῦ ἀπὸ ζ κ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θ ζ κ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ, τουτέστιν ἡ ζ θ πρὸς ζ κ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς κ ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ. τὸ δὲ ἀπὸ κ ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ κ ζ πρὸς ζ κ. ἡ ἄρα θ ζ πρὸς ζ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ ζ πρὸς ζ κ. (ἡ

ζ κ ζ πρὸς

κζ πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ βζ πρὸς ζδ. (τοῦτο δὲ ἑξῆς δειχθήσεται.) καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζδ τοῦ ὑπὸ τῶν βεδ. ἡ ζβ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βζ. ἔλασσον ἄρα τὸ ἀπὸ ζβ τοῦ ὑπὸ τῶν θβε. τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν θβκ. ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ βν τῷ ὑπὸ θβκ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. τὸ ἀπὸ θζ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς βκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βε, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζκ. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς κζ πρὸς ζκ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει. καί ἐστιν ὡς μὲν ἡ θζ πρὸς ζκ, ὁ αθγ κῶνος πρὸς τὸν ακγ κῶνον. τουτέστι τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αδγ τμῆμα. ὡς δὲ ἡ κζ πρὸς ζκ, ἡ βζ πρὸς ζδ, τουτέστι τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ αδγ τμήματος. ἄλλως τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

Ἄλλως. Ἔστω σφαῖρα, ἧς ὁ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. διάμετρος δὲ ἡ αγ. κέντρον δὲ τὸ ε. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ὀρθῷ διὰ τῆς βδ πρὸς τὴν αγ. λέγω ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ δαβ πρὸς τὸ ἔλασσον τὸ βγδ, ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβδ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ βγδ τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, βγ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγος, ὁ τοῦ κύκλου ἐστὶν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ αβ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ βγ, τουτέστιν ὁ τῆς αθ πρὸς τὴν θγ. κείσθω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἑκατέρα τῶν αζ, γη. ὁ δὲ τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸ βγδ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ βαδ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον, καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ βαδ τμήματος λόγος, πρὸς τὸν βαδ κῶνον, ὁ τῆς ηθ ἐστὶ πρὸς θγ. ὁ δὲ τοῦ κώνου, πρὸς τὸν κῶνον ὁ τῆς αθ πρὸς θγ. ὁ δὲ τοῦ βγδ κώνου πρὸς τὸ τμῆμα τὸ βγδ ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θζ. ὁ δὲ συνημμένος ἐκ τῆς ηθ πρὸς θγ, καὶ τῆς αθ πρὸς θγ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν αθη ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ηθ, θα, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ μετὰ τοῦ τῆς αθ



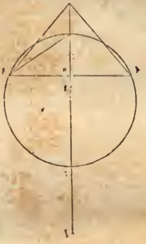
πρὸς θζ. ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ηθ, θα ἐστὶν ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ, ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ηθα ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν γη, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς θα ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ θα ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. διπλασίων δέ ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν ηθ, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θζ. ὅτι ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ, τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. ὅτι ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ θζ τῆς θη, φημὶ δὲ ὅτι καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον λόγον μείζονα ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη, ὁ αὐτὸς ὧν ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θζ. τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας λόγου, ἡμιόλιος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. φημὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον. τουτέστιν ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. τουτέστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. καὶ ὅταν αθ πρὸς θβ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ ὅ ἐστι τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γθβ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θβγ, ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶν ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θβγ ἐπὶ τὴν θη. φημὶ δὴ ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθγ. τουτέστι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη. δεικτέον οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν βθγ, ἐπὶ τὴν ηθ. ὅ ταὐτόν ἐστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ηθ πρὸς θζ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ᾽ αὐτὴν ἡ βλ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι, διότι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἴση δέ ἐστιν ἡ θζ

συναμφοτέρῳ

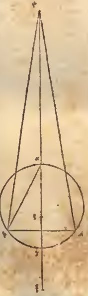
συναμφοτέρῳ τῇ α β κ ι. δεῖξαι ἄρα δεῖ, ὅτι ἡ κ θ πρὸς συναμφότερον τὴν θ α κ ι, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ὑπὸ τῆς κ τῆς γ θ, ἀπὸ δὲ τῆς κ ι τῆς ι λ ἴσης τῇ β θ, δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γ κ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν α θ, κ λ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β, τουτέστιν ἡ θ β πρὸς θ α. τουτέστιν ἡ λ ι πρὸς θ α. καὶ ἐναλλάξ. ὅτι ἡ κ ι πρὸς ι λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κ λ, θ α, πρὸς θ α. καὶ διελόντι, ἡ κ λ πρὸς λ ι μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ λ πρὸς θ α. ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ λ ι τῆς θ α.

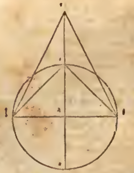
Τῶν ὑπὸ τῇ ἴσῃ ἐπιφανείᾳ περιεχομένων σφαιρικῶν τμημάτων, μεῖζον ἐστὶ τὸ ἡμισφαίριον. ἔστω γὰρ σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ α γ. καὶ ἄλλη σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ε ζ η θ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ε η. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ μὲν ἑτέρα σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ἑτέρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου. ἔστω δὲ τὰ μὲν τέμνοντα ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὰς α γ, ε η διαμέτρους. καὶ τετμήσθωσαν κατὰ τὰς δ β, ζ θ γραμμάς. ἔστι δὴ τὸ μὲν κατὰ τὴν ζ ε θ περιφέρειαν τμῆμα τῆς σφαίρας ἡμισφαίριον, τῶν δὲ κατὰ τὴν β α δ περιφέρειαν τομῶν. ἐν μὲν τῷ ἑτέρῳ σχήματι πρὸς ὃ τὸ α σημεῖον μεῖζον ἡμισφαιρίου. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ ἔλασσον ἡμισφαιρίου. ἴσαι δὲ ἔστωσαν αἱ τῶν εἰρημένων τμημάτων ἐπιφάνειαι.

β



λέγω οὖν ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ κατὰ τὴν ζ ε θ περιφέρειαν ἡμισφαίριον, τοῦ κατὰ τὴν β α δ περιφέρειαν τμήματος. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων, φανερὸν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ β α τῇ ε ζ εὐθείᾳ. δέδεικται γὰρ ἑκάστου τμήματος ἡ ἐπιφάνεια ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος εὐθείᾳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡμίσεως κύκλου ἡ β α δ περιφέρεια ἐν τῷ ἑτέρῳ σχήματι, πρὸς ὃ τὸ α σημεῖον, δῆλον ὅτι ἡ β α ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίον δυνάμει τῆς α κ, τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων ἢ διπλασίον δύναται. ἔστω δὲ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α β δ κύκλου ἴση ἡ γ ξ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γ ξ πρὸς τὴν γ κ, τοῦτον ἐχέτω ἡ μ α πρὸς α κ. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου περὶ διάμετρον τὴν β δ κῶνος ἔστω, κορυφὴν ἔχων τὸ μ σημεῖον. ἴσος δὴ ἐστὶν οὗτος τῷ κατὰ τὴν β α δ περιφέρειαν τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω καὶ τῇ ε λ ἴση ἡ ε ν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θ ζ κῶνος, ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὲ καὶ οὗτός ἐστι τῷ κατὰ τὴν θ ε ζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν

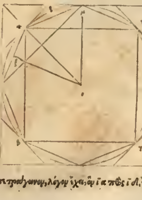


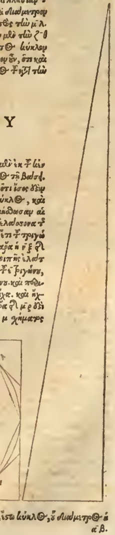


α ε γ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν α κ γ. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς α ε, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν α κ, γ ξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α β. μεῖζον οὖν ἐστι καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. τὸ ἄρα περιεχόμενον ὑπὸ τῶν γ α ε, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ξ κ α. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξ κ α, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μ κ γ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν γ α ε, τοῦ ὑπὸ τῶν μ κ γ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ γ α πρὸς τὴν κ γ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς τὴν α ε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ α γ πρὸς τὴν γ κ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς α β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β κ. δῆλον οὖν, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς α β, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ α ε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β κ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς α ε, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λ ν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζ θ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν β δ, ἢ ἡ μ κ πρὸς τὴν μ λ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν ζ θ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν β δ, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ ἐπὶ τὴν ε ζ θ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ ἐπὶ τὴν β α δ περιφέρειαν.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

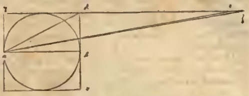
α Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. ἐχέτω ὁ α β γ δ κύκλος, ὡς ὑπόκειται. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ ε. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ α γ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου. τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ ν, καὶ κάθετος ἡ ν ξ. ἐλάσσων ἄρα ἡ ν ξ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων. ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου. ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ ε τριγώνου, ὅπερ ἄτοπον. ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάττων τοῦ ε τριγώνου. καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ο α ρ. ἡ ο ρ ἄρα τῆς μ ρ ἐστὶ μείζων. ἡ γὰρ ρ μ τῇ ρ α ἴση ἐστί. καὶ τὸ ρ ο π τρίγωνον ἄρα τοῦ ο ζ α μ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ π ζ α τομεῖς ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ε τρίγωνον τοῦ α β γ δ κύκλου. ἔστιν ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἔτι τοῦ ε ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον. ἔστι γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ν α ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου. ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ ε τριγώνῳ.





β Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ. ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ α β.

αβ. καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον τὸ γη, καὶ τῆς γδ διπλῆ ἡ δε, ἕβδομον δὲ ἡ εζ τῆς γδ. ἐπεὶ οὖν τὸ αγε πρὸς τὸ αγδ λόγον ἔχει, ὃν κα πρὸς ζ. πρὸς δὲ τὸ αεζ τὸ αγδ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἕν. τὸ αγζ πρὸς τὸ αγδ ἐστίν, ὡς κβ πρὸς ζ. ἀλλὰ τοῦ αγδ τετραπλάσιόν ἐστι, τὸ γη τετράγωνον. τὸ δὲ αγζ τρίγωνον, τῷ αβ κύκλῳ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ ἡ μὲν αγ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων, καὶ τῷ ζ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται. ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ γη τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ.



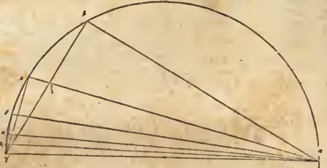
γ Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστί. καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ αγ, καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ ἡ γλζ ἐφαπτομένη. καὶ ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτου ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τς πρὸς ρνγ. ἡ δὲ εγ πρὸς τὴν γζ λόγον ἔχει, ἢ ὃν σξε πρὸς ρνγ. τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ. καὶ ἐναλλὰξ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. ὥστε ἡ γε πρὸς γη μείζονα λό-



γον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ἡ εη ἄρα πρὸς ηγ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν ͵μ θυν πρὸς ͵μ γυθ. μή- λα β
κει ἄρα ὃν φϟα πρὸς ρνγ. πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ εθ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ εγ πρὸς γθ, μείζο- μ μ
να λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αρξβ η' πρὸς ρνγ. ἡ θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αροβ η' πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θεγ τῇ εκ. ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵βτλδ δ' πρὸς ρνγ. ἡ εκ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵βτλθ δ' πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ λε. ἡ εγ ἄρα πρὸς λγ μείζονα μήκει λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ λεγ, ὀρθῆς ἐστι μη. κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση ἡ πρὸς τῷ ε, ἡ ὑπὸ γεμ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ ὀρθῆς ἐστι κδ. καὶ ἡ λμ ἄρα εὐθεῖα πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϟς. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ ἐδείχθη μείζονα λό-

γον ἔχουσα, ἤπερ ͵δχογ∠ πρὸς ρνγ. ἀλλὰ τῆς μὲν εγ διπλῆ ἡ αγ. τῆς δὲ γλ διπλασίων ἡ κμ.
α καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϟϛ πολυγώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ∠ πρὸς
μ μ͵δχπη. καί ἐστι τριπλασία. καὶ ὑπερέχουσι χξζ∠ ἅπερ τῶν ͵δχογ∠, ἐλάσσονά ἐστι τὸ ἕβδομον, ὥς τε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον, καὶ ἔλαττον ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον. ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τριπλασίων, καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

δ- ΕΣτω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ αγ. ἡ δὲ ὑπὸ βαγ τρίτον ὀρθῆς. ἡ αβ ἄρα πρὸς βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵ατνα πρὸς ψπ. ἡ δὲ αγ πρὸς γβ, ὃν ͵αφξ πρὸς ψπ. τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ αη, ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ ηγβ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ηαγ, καὶ ἡ ὑπὸ



ηγβ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηαγ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ αηγ ὀρθή, καὶ τρίτη ἄρα ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ηζγ τρίτῃ τῇ ὑπὸ αγη. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αηγ τῷ γηζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αη πρὸς ηγ, ἡ γη πρὸς ηζ, καὶ ἡ αγ πρὸς γζ. ἀλλ' ὡς ἡ αγ πρὸς γζ, καὶ συναμφότερος ἡ γαβ πρὸς βγ. καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ βαγ πρὸς βγ, ἡ αη πρὸς ηγ. διὰ τοῦτο οὖν ἡ αη πρὸς τὴν ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. ἡ δὲ αγ πρὸς τὴν γη ἐλάσσονα, ἢ ὃν ͵γιγ∠δ πρὸς ψπ. δίχα ἡ ὑπὸ γαη τῇ αθ. ἡ αθ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵ελκδ∠δ' πρὸς ψπ, ἢ ὃν ͵αω κγ πρὸς σμ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας διὰ ιγ. ὥστε ἡ αγ πρὸς τὴν γθ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αωλη θ πρὸς σμ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θαγ τῇ κα. καὶ ἡ κα, πρὸς τὴν κγ ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αζ πρὸς ξς. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας οἶμαι ἄρα πρὸς τὸ κατάλογον ͵αος πρὸς ξς. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ καγ τῇ λα. ἡ αλ ἄρα πρὸς τὴν αγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν τὰ ͵βιϛ ς' πρὸς ξς. ἡ δὲ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα, ἢ τὰ ͵βιζ δ' πρὸς ξς. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα ἔχει λόγον ἤπερ ͵ϛτλϛ πρὸς ͵βιζ δ'. ἅπερ τῶν ͵βιζ δ' μείζονα ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα. καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟϛ πολυγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου, τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ δέκα οα. ὥς τε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων, ἢ δέκα οα. ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ, καὶ ἐλάσσων μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζων δέ.

ΑΡΧΙ-

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΕΥ ΠΡΑΤΤΕΙΝ.

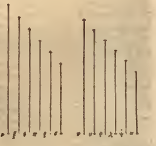
ΑΠΟΣΤΕΛΛΩ σοι γράψας ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τῶν τε λοιπῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξιας, ὧν οὐκ εἶχες ἐν τοῖς πρότερον ἀπεσταλμένοις, καὶ ἄλλων ὕστερον ποτεξευρημένων, ἃ πρότερον μὲν ἤδη πολλάκις ἐγχειρήσας ἐπισκέπτεσθαι, δύσπορον ἔχειν τι φανείσας μοι τᾶς εὑρέσιας αὐτῶν ἠπόρησα. διόπερ οὐδὲ συνεξεδόθεν τοῖς ἄλλοις αὐτὰ τὰ προβεβλημένα. ὕστερον δὲ ἐπιμελέστερον ποτ' αὐτοῖς γενόμενος ἐξεῦρον τὰ ἀπορηθέντα. ἦν δὲ τὰ μὲν λοιπὰ τῶν προτέρων θεωρημάτων περὶ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος προβεβλημένα, τὰ δὲ νῦν ἐντί ποτ' ἐξευρημένα περί τε ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, καὶ περὶ σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν τὰ μὲν παραμάκεα, τὰ δὲ ἐπιπλατέα καλέω. περὶ μὲν οὖν τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος ὑπόκειτο τάδε. εἴκα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι, καὶ ἄξονα μὲν αὐτοῦ, τὰν μεμενακεῖαν διάμετρον καλεῖσθαι. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας. καὶ εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμνῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς, ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. ἄξονα δὲ τὰν ἐναπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν ἐν τῷ τμάματι, ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κωνοειδέος. προεβαλλόντο δὲ τάδε θεωρῆσαι, διὰ τί εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τμάματα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. καὶ διὰ τί εἴκα ἀπὸ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέντα ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ ἀποτμαθέντα τμάματα διπλάσιον λόγον ἑξοῦντι ποτὶ τὰ ἄλλα τῶν ἀξόνων. περὶ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ὑποτιθέμεθα μὲν τάδε. εἴκα ἐν ἐπιπέδῳ ἔωντι ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς, καὶ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου τομᾶς. μενούσας δὲ τᾶς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ εἰρημέναι γραμμαί, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, αἱ μὲν ἔγγιστα εὐθεῖαι τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, δῆλον ὡς κῶνον ἰσοσκελῆ περιλαψοῦντι, οὗ κορυφὰ ἐσεῖται τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἔγγιστα συμπίπτοντι. ἄξων δὲ ἁ μεμενακοῦσα διάμετρος. τὸ δὲ ὑπὸ τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς σχῆμα περιλαφθέν, ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι. ἄξονα δὲ αὐτοῦ τὰν μεμενακοῦσαν διάμετρον. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδέος. τὸν δὲ κῶνον τὸν περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶς τοῦ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, περιέχοντα τὸ κωνοειδὲς καλεῖσθαι. τὰν δὲ μεταξὺ εὐθεῖαν τᾶς τε κορυφᾶς τοῦ κωνοειδέος καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι. καὶ εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον, ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν, ἀποτέμνῃ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς, ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον τοῦ κωνοειδέος. ἄξονα τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἐν τῷ τμάματι, ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος, καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές. καὶ τὰν μεταξὺ τᾶν εἰρημέναν κορυφᾶν εὐθεῖαν ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι. τὰ μὲν οὖν ὀρθογώνια κωνοειδέα πάντα, ὅμοιά ἐντι. τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων κωνοειδέων ὅμοια καλείσθω, ὧν καὶ οἱ κῶνοι οἱ περιέχοντες τὰ κωνοειδέα ὅμοιοι ἐῶντι. προβάλλεται δὲ τάδε θεωρῆσαι, διὰ τί εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτμαθῇ τμάματα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέρα ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος. καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. καὶ διὰ τί, εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος

δὲ τμᾶμα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὃ γίγνεται ἀπότμαμα κώνου, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφότερος ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. περὶ δὲ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὑποτιθέμεθα τάδε. εἴκα ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς μενούσας τᾶς μείζονος διαμέτρου περιενεχθεῖσα, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφθὲν σχῆμα, ὑπό τε τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς παραμᾶκες σφαιροειδὲς καλεῖσθαι. εἰ δὲ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου μενούσας περιενεχθεῖσα, ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιπλατυσφαιροειδὲς καλεῖσθαι. ἑκατέρου δὲ τῶν σφαιροειδέων ἄξονα μὲν καλεῖσθαι τὰν μεμενακυῖαν διάμετρον, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον καθ᾽ ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ σφαιροειδέος. κέντρον δὲ καλεῖσθαι τὸ μέσον τοῦ ἄξονος, καὶ διάμετρον τὰν διὰ τοῦ κέντρου ποτ᾽ ὀρθὰς ἀγομέναν τῷ ἄξονι. καὶ εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερωνοῦν ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύοντι μὴ τέμνοντα. παρὰ δὲ τὰ ἐπίπεδα τὰ ψαύοντα, ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθῇ, τέμνον τὸ σφαιροειδὲς τῶν γενομένων τμαμάτων, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος τομᾶς ἐν τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. κορυφὰς δὲ τὰ σαμεῖα, καθ᾽ ἃ ἐπιψαύοντι τοῦ σφαιροειδέος τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἄξονας δὲ τὰς ἐναπολαφθείσας εὐθείας ἐν τοῖς τμαμάτεσσιν ἀπὸ τᾶς εὐθείας τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπιζευγνυούσας. ὅτι δὲ τὰ τε ἐπιψαύοντα ἐπίπεδα τοῦ σφαιροειδέος καθ᾽ ἓν μόνον ἅπτονται σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ, καὶ ὅτι ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύεται, δειξοῦμες. ὅμοια δὲ καλεῖσθαι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν καὶ οἱ ἄξονες ποτὶ τὰς διαμέτρους τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι. τμᾶμα δὲ σφαιροειδέων σχημάτων καὶ κωνοειδέων ὅμοια καλεῖσθαι, εἴκα ἀφ᾽ ὁμοίων σχημάτων ἀφαιρημένα ἔωντι, καὶ τάς τε βάσιας ὁμοίας ἔχοντι καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν, ἤτοι ὀρθοὶ ἐόντες ποτὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν βασίων, ἢ γωνίας ἴσας ποιοῦντες, ποτὶ τὰς ὁμολόγους διαμέτρους τῶν βασίων τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ποτ᾽ ἀλλάλους ταῖς ὁμολόγοις διαμέτροις τῶν βασίων. προβάλλεται δὲ περὶ τῶν σφαιροειδέων τάδε θεωρῆσαι. διά τι εἴκα τι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῶν γενομένων τμαμάτων, ἑκάτερον διπλάσιον ἐσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. εἴκα δὲ ὀρθῷ μὲν ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ, διὰ τοῦ κέντρου δὲ μή, τῶν γενομένων τμαμάτων τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸν κῶνον τὸν τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς εὐθείας, ἃ δὴ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ ἐλάσσονος τμάματος. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς εὐθείας, ἃ δὴ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. καὶ διατί εἴκα τοῦ σφαιροειδέος τι ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τῶν γενομένων τμαμάτων ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ σχήματος, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. γίγνεται δὲ τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου. εἴκα δὲ μήτε διὰ τοῦ κέντρου, μήτε ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδές, τῶν γενομένων τμαμάτων, τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ αὐτᾶς τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων. καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος. γίνεται δὲ καὶ ἐν τούτοις τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου. ἀποδειχθέντων δὲ τῶν εἰρημένων θεωρημάτων διὰ τούτων εὑρίσκονται θεωρήματά τε πολλὰ καὶ προβλήματα. οἷον καὶ τόδε, ὅτι τὰ ὅμοια σφαιροειδέα, καὶ τὰ ὅμοια τμάματα τῶν τε σφαιροειδέων σχημάτων καὶ τῶν κωνοειδέων, τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτὶ τὰ ἄλλα τῶν ἀξόνων, καὶ διότι τῶν ἰσοσφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν. καὶ εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν, ἴσα ἐντὶ τὰ σφαιροειδέα. πρόβλημα δὲ οἷον καὶ τόδε, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σφαιροειδέος τμάματος ἢ κωνοειδέος τμᾶμα, ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ ἀγμένῳ.

ρίῳ. εἰ μὲν δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἴσον τῷ δοθέντι κώνῳ, ἢ κυλίνδρῳ, ἢ σφαίρᾳ τᾷ δοθείσᾳ. προγράψαντες οὖν τά τε θεωρήματα καὶ τὰ ἐπιτάγματα τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν, μετὰ ταῦτα γραψοῦμές τοι τὰ προβλήματα. εὐτύχει.

Εἴκα κῶνος ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς, ἁ τομὰ ἐσσεῖται, α
ἤτοι κύκλος, ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν οὖν κύκλος ἁ τομά, δῆλον ὅτι τὸ ἀπολαφθὲν ἀπ' αὐτοῦ τμᾶμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ, κῶνος ἐσσεῖται. εἴκα δὲ ἁ τομὰ γένηται ὀξυγωνίου κώνου τομά, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κώνου σχῆμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ τοῦ κώνου κορυφᾷ ἀπότμαμα κώνου καλείσθω. τοῦ δ' ἀποτμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἐπίπεδον, τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ κώνου κορυφά. ἄξων δέ, ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα. καὶ εἴκα κύλινδρος δυσὶν ἐπιπέδοις παραλλήλοις τμαθῇ, συμπιπτόντεσσι πάσαις ταῖς τοῦ κυλίνδρου πλευραῖς, αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται, ἤτοι κύκλοι, ἢ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἴσαι καὶ ὁμοῖαι ἀλλάλαις. εἰ μὲν οὖν καὶ αἱ τομαὶ κύκλοι γίνωνται, δῆλον ὅτι τὸ ἀποτμαθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα, μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων κύλινδρος ἐσσεῖται. εἰ δὲ καὶ αἱ τομαὶ γένωνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τόμος κυλίνδρου καλείσθω. τοῦ δὲ τόμου βάσιες μὲν καλείσθω τὰ ἐπίπεδα τὰ περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἄξων δὲ ἁ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα τὰ κέντρα τᾶν τοῦ ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου. εἴκα ἐόντι μεγέθεα, ὁποσαοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντα τὰ μεγέθεα, ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντων μὲν τῶν τῷ ἴσῳ ὑπερεχόντων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται ἢ διπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα ἢ διπλάσια. ἁ δὲ ἀπόδειξις τούτου φανερά.

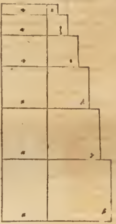


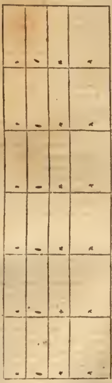


Εἴκα μεγέθεα ὁποσαοῦν τῷ πλήθει, ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τὰ ὁμοίως τεταγμένα, λέγηται δὲ τά τε πρῶτα μεγέθεα ποτὶ τ' ἄλλα μεγέθεα, ἢ πάντα, ἢ τινὰ αὐτῶν ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, καὶ τὰ ὕστερον ποτ' ἄλλα μεγέθεα τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθεα, ποτὶ πάντα ἃ λέγονται, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν ἔχοντι πάντα τὰ ὕστερον μεγέθεα ποτὶ πάντα ἃ λέγονται. ἔστω τινὰ μεγέθεα τὰ α β γ δ ε ζ ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει τοῖς η θ ι κ λ μ, κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. καὶ ἐχέτω τὸ μὲν α ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ η ποτὶ τὸ θ. τὸ δὲ β ποτὶ τὸ γ, ὃν τὸ θ ποτὶ τὸ ι. καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις. λεγέσθω δὲ τὰ μὲν α β γ δ ε ζ μεγέθεα, ποτὶ τὰ ἄλλα μεγέθεα τὰ ν ξ ο π ρ σ, ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν. τὰ δὲ η θ ι κ λ μ ποτὶ τ' ἄλλα τὰ τ υ φ χ ψ ω, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. ὃν μὲν ἔχει λόγον τὸ α ποτὶ τὸ ν, τὸ η ἐχέτω ποτὶ τὸ τ. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ β ποτὶ τὸ ξ, τὸ θ ἐχέτω ποτὶ τὸ υ. καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις. δεικτέον, ὅτι πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ, ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ν ποτὶ τὸ α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τ ποτὶ τὸ η, τὸ δὲ α ποτὶ τὸ β ὃν τὸ η ποτὶ τὸ θ, τὸ δὲ β ποτὶ τὸ ξ ὃν τὸ θ ποτὶ τὸ υ, τὸν αὐτὸν ἑξεῖ λόγον τὸ ν ποτὶ τὸ ξ, ὃν τὸ τ ποτὶ τὸ υ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ο, ὃν τὸ υ ποτὶ τὸ φ. καὶ τούτοις τὰ ἄλλα ὁμοίως. ἔχοντι δὲ τὰ μὲν α β γ δ ε ζ πάντα ποτὶ τὸ α τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχοντι τὰ η θ ι κ λ μ πάντα ποτὶ τὸ η. τὸ δὲ α ποτὶ τὸ ν, ὃν τὸ η ποτὶ τὸ τ. τὸ δὲ ν ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν λόγον ὃν τὸ τ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. δῆλον οὖν, ὅτι β

πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ ς τὸν αὐτὸν ἕξοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ κ θ ι κ λ μ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ εἴκα τῶν τε α β γ δ ε ζ μεγεθέων, τὰ μὲν α β γ δ ε λέγωντι ποτὶ τὰ ν ξ ο π ρ σ. τὸ δὲ ζ μηδὲ ποθὲν λέγηται, καὶ τὰ κ θ ι κ λ μ λέγωντι ποτὶ τὰ τ υ φ χ ψ ω, τὰ ὁμοῖα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ μ μηδὲ ποθὲν λέγηται, ὁμοίως πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ κ θ ι κ λ μ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω.

γ Εἴκα γραμμαὶ ἴσαι ἀλλάλαις ἐῶντι, ὁπόσαι οὖν τῷ πλάθει, καὶ παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν παραπεσῇ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἐῶντι δὲ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, ἐῶντι δὲ καὶ ἄλλα χωρία τῷ μὲν πλάθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ. ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἴσα συναμφοτέραις ταῖς τε τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾶς. καὶ μιᾷ τᾶν ἴσαν ἐουσᾶν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τῷ τε τρίτῳ μέρει τᾶς τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾶς. καὶ τᾷ ἡμίσει μιᾶς τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρία ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ ἴσαι εὐθεῖαι ὁποσαιοῦν τῷ πλήθει ἐφ' ἃν τὰ α, καὶ παραπεπτωκέτω παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. ἔστων δὲ ὑπερβλημάτων πλευραὶ αἱ β γ, δ, ε, ζ, η τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι. καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἔστω ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ. καὶ μεγίστα μὲν ἔστω ἁ β, ἐλαχίστα δὲ ἁ η. ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ὧν ἕκαστον ἐφ' ὧν θ ι κ λ τῷ μὲν





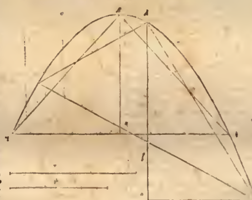
πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον ἔστω τῷ μεγίστῳ τῷ παρὰ τὰν α β παρακειμένῳ. ἔστω δὲ ἁ μὲν θ ι γραμμὰ ἴσα τᾷ α. ἁ δὲ κ λ ἴσα τᾷ β. καὶ τᾶν μὲν θ ι γραμμᾶν ἑκάστα ἔστω διπλασία τᾶς ι. τᾶν δὲ κ λ ἑκάστα τριπλασία τᾶς κ. δεικτέον ὅτι τὰ χωρία πάντα ἐν οἷς τὰ θ ι κ λ ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία τὰ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ ι κ λ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ι κ. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ ἄνευ τοῦ μεγίστου τοῦ α β μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἐστὶ γάρ τινα χωρία, ἐν οἷς τὰ α τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα. καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ. ἐπεί τε τὰ παραβλήματα καὶ τὰ πλάτει τῷ ἴσῳ ὑπερέχουσιν, καὶ ἄλλα χωρία, ἐν οἷς τὰ θ ι τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ. σύμπαντα οὖν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ θ ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ α ἐλάσσονα ἐστὶ, ἢ διπλασίονα. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μεῖζον ἢ διπλασίονα. αὐτὰ οὖν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ α ἐλάσσονα ἐστὶ. τῶν δὲ λοιπῶν ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα. πάλιν ἐστὶ γραμμαί τινες αἱ β γ δ ε ζ η, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἐφ' ἃν τὰ κ λ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσαι τᾷ μεγίστᾳ. τὰ οὖν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, πάντων

μὲν τῶν

μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ πάντων τῶν ἴσων ἀλλάλων ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλίκων ἐκδεδομένοις. τὰ οὖν χωρία ἐν οἷς τὸ κ, πάντων μὲν τῶν χωρίων ἐν οἷς β γ δ ε ζ η ἐλάσσονα ἐντί. αὐτῶν δὲ τῶν ἐν οἷς τὰ γ δ ε ζ η μείζονα. ὥστε καὶ πάντα τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ ι α, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς αβ, αγ, αδ, αε, αζ, αη ἐλάσσονα ἐντί. τῶν δὲ ἐν οἷς αγ, αδ, αε, αζ, αη μείζονα. δῆλον οὖν ὅτι πάντα τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ θι, κλ, ποτὶ μὲν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ αβ, αγ, αδ, αε, αζ, αη ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, τοῦ ὃν ἔχει ἁ θλ ποτὶ τὰν ικ. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρὶς τοῦ ἐν ᾧ τὸ αβ μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου.

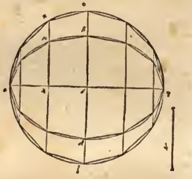
Εἴκα κώνου τομᾶς ὁποιασοῦν εὐθεῖαι ἐπιψαύοντι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σαμείου ἀγμέναι, ἔωντι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ, παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἀγμέναι, καὶ τέμνουσαι ἀλλάλας, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτὶ τὰ ἄλλα ὄντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπιψαυουσᾶν. ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τᾶς ἑτέρας γραμμᾶς τμαμάτων τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας παραλλήλας αὐτᾷ. ἀποδέδεικται δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

Εἴκα ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάματα ἀφαιρεθέωντι ὁπωσοῦν, ἴσας ἔχοντα τὰς διαμέτρους, αὐτά τε τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. διάμετρον δὲ καλέω παντὸς τμάματος, τὰν δίχα τέμνουσαν τὰς εὐθείας πάσας, τὰς παρὰ τὰν βάσιν αὐτοῦ ἀγομένας. ἔστω ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β γ. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπ' αὐτᾶς δύο τμάματα, τό, τε α δ ε, καὶ τὸ θ β γ. ἔστω δὲ τοῦ μὲν α δ ε τμάματος διάμετρος ἁ δ ζ, τοῦ δὲ θ β γ ἁ β η. καὶ ἔστων ἴσαι αἱ δζ, βη. δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα ἴσα ἐντὶ τὰ α δ ε, θ β γ, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα τὸν εἰρημένον τρόπον ἐν αὐτοῖς. ἔστω δὴ πρῶτον ἀποτεμνόμενον τὸ ἕτερον τμᾶμα ἁ θ β γ, ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. λελάφθω δὲ ἃν δύνανται αἱ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἁ διπλασία τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. καὶ ἔστω ἐφ' ᾇ τὸ μ. ἀπὸ δὲ τοῦ α κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν δζ ἁ ακ. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐντι ἁ δζ τοῦ τμάματος, ἅ τε αε δίχα τέμνεται κατὰ τὸ ζ, καὶ ἁ δζ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. οὕτω γὰρ δίχα τέμνει πάσας τὰς παρὰ τὰν αε ἀγομένας. ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς αζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ακ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ν ποτὶ τὰν μ. αἱ δὲ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν δζ ἀγόμεναι παρὰ τὰν αε, δύνανται τὰ παρὰ τὰν ἴσαν τᾷ ν παραπίπτοντα πλάτος ἔχοντα, ἃς αὐταὶ ἀπολαμβάνοντι ἀπὸ τᾶς δζ ποτὶ τῷ δ πέρας. δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς. δύναται οὖν καὶ ἁ αζ ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς ν, καὶ τᾶς δζ. δύναται δὲ καὶ ἁ θη, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μ, καὶ ὑπό τε τᾶς βη. ἐπεὶ κάθετός ἐστιν ἁ θη ἐπὶ τὰν διάμετρον. ἔχει καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς αζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θη τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ν ποτὶ τὰν μ. ἐπεὶ ἴσαι ὑπόκειντο αἱ δζ, βη. ἔχει δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς αζ τετράγωνον, καὶ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ακ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ν ποτὶ τὰν μ. ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ θη, ακ. ἐντὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ βη, δζ. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θη, βη περιεχόμενον, τῷ ὑπὸ τᾶν ακ, δζ. ἴσον ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ θηβ τρίγωνον τῷ δαζ τριγώνῳ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. ἐστὶ δὲ τοῦ μὲν αδε τριγώνου ἐπίτριτον τὸ δ



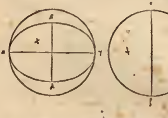
α δ ε τμᾶμα. τοῦ δὲ θ β γ τριγώνου, ἐπίτριτον τὸ θ β γ τμᾶμα. δῆλον οὖν ὅτι τὰ τμάματα ἐντὶ ἴσα, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά. ἀλλὰ μὴν ἴσθα τὰν τὰ τμάματα ἀποτεμνουσᾶν ποτ᾽ ὀρθὰς ἐν τῇ τᾶ διαμέτρω τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀφαιρεθείσας ἀπὸ τᾶς μετὰ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἴσας τᾶ διαμέτρω τᾶς τοῦ ἑνὸς τμάματος, καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἀφαιρεθείσας ποτ᾽ ὀρθὰς ἀχθείσας τᾶ διαμέτρω τὸ γινόμενον τμᾶμα, ἑκατέρω τῶν τμαμάτων ἴσον ἐσσεῖται. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προτεθέν.

5 Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον ἴσαν τᾷ μείζονι διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἐλάσσων διάμετρος αὐτᾶς ποτὶ τὰν μείζω, τουτέστι ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου διάμετρον. ἔστω γὰρ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἐφ᾽ ἇς τὰ α β γ δ. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μὲν μείζων ἔστω, ἐφ᾽ ἇς τὰ α γ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἐφ᾽ ἇς τὰ β δ. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὰν α γ, δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ποτὶ τὸν κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν γ α, τουτέστι τὰν ε ζ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν ε ζ, τοῦτον ἐχέτω ὁ κύκλος ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸν α ε γ ζ κύκλον. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ψ κύκλος τῷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος ὁ ψ κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων. δυνατὸν δή ἐστιν εἰς τὸν ψ κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι ἀρτιόγωνον, μεῖζον τοῦ α β γ δ χωρίου. νοείσθω δὴ ἐγγεγραμμένον. ἐγγεγράφθω δὴ καὶ εἰς τὸν α ε γ ζ κύκλον εὐθύγραμμον, ὅμοιον τῷ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ. καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ κάθετοι ἄχθωσαν ἐπὶ τὰν α γ διάμετρον. ἐπὶ δὲ τὰ σαμεῖα καθ᾽ ἃ τέμνονται αἱ κάθετοι ταῖ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶν, εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν. ἐσσεῖται δή τι εὐθύγραμμον, ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον, καὶ ἕξει τὸ αὐτὸ ποτὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α ε γ ζ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν ε ζ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ε θ, κ λ κάθετοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέτμηνται κατὰ τὰ μ β, δῆλον ὅτι τὸ λ ε τραπέζιον ποτὶ τὸ θ μ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θ ε ποτὶ τὰν β θ. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τῶν ἄλλων τραπεζίων ἕκαστον τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ποθ᾽ ἕκαστον τῶν τραπεζίων τῶν ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε θ ποτὶ τὰν β θ. ἔχοντι δὲ καὶ



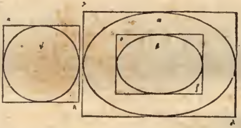
τὰ τρίγωνα τὰ ποτὶ τοῖς α, γ τὰ ἐν τῷ κύκλῳ, ποτὶ τὰ ἐν τᾷ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτον τὸν λόγον. ἕξει οὖν καὶ ὅλον τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α ε γ ζ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ποτὶ ὅλον τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε ζ ποτὶ τὰν β δ. ἔχει δὲ τὸ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον καὶ ποτὶ τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦτον τὸν λόγον, διότι καὶ οἱ κύκλοι τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ, ὅπερ ἀδύνατον. μεῖζον γὰρ ἦν ὅλου τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου τομᾶς. ἀλλ᾽ ἔστω εἰ δυνατὸν ἐλάσσων, πάλιν δὴ δυνατὸν εἰς τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐγγράψαι πολύγωνον ἀρτιόπλευρον μεῖζον τοῦ ψ κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ κάθετοι ἀχθεῖσαι ἐπὶ τὰν α γ, ἐκβεβλήσθωσαν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πάλιν οὖν ἐσσεῖται τι ἐν τῷ α ε γ ζ κύκλῳ εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, ὃ ἕξει ποτὶ τὸ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε ζ ποτὶ τὰν β δ. ἐγγεγραφέντος δὴ καὶ εἰς τὸν ψ κύκλον ὁμοίου αὐτῷ, δειχθήσεται τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐὸν τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἔστιν οὖν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ψ κύκλος τοῦ χωρίου, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. δῆλον οὖν ὅτι τὸ εἰρημένον χωρίον ποτὶ τὸν α ε γ ζ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν ε ζ.

Πᾶν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ πάντα κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ε
ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τοῦ κύκλου διαμέτρου τετράγωνον. ἔστω γάρ τι χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν ᾧ τὸ χ, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς αἱ αγ, βδ, μείζων δὲ ἁ αγ. καὶ κύκλος ἔστω, ἐν ᾧ τὸ ψ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ εζ. δεικτέον ὅτι τὸ χ χωρίον ποτὶ τὸν ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν αγ, βδ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς εζ τετράγωνον. περιγεγράφθω δὴ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν αγ. τὸ δὴ χ χωρίον ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἁ αγ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν αγ, βδ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς αγ τετράγωνον. δέδεικται γὰρ ἔχον ὃν ἁ βδ ποτὶ τὰν αγ. ἔχει δὲ καὶ ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ αγ, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ διάμετρος ἁ εζ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αγ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς εζ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ χ χωρίον ποτὶ τὸν ψ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν αγ, βδ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς εζ τετράγωνον.



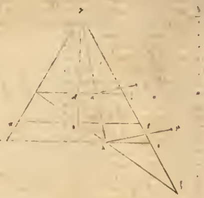
Τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἄλλαλα, ὃν τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν διαμέτρων * τμαμάτων ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν ποτ' ἄλλαλα. ἔστω περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν, ἐν οἷς τὰ α, β. ἔστω δὲ καὶ τὸ μὲν γδ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τᾶς περιεχούσας τὸ α χωρίον, τὸ δὲ εζ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς ἑτέρας τομᾶς. δεικτέον ὅτι τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ γδ ποτὶ τὸ εζ. λελάφθω δὴ κύκλος τις, ἐν ᾧ τὸ ψ. ἀπὸ δὲ τᾶς διαμέτρου αὐτοῦ τετράγωνον ἔστω τὸ κλ. ἔχει δὲ τὸ μὲν α χωρίον, ποτὶ τὸν ψ κύκλον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ γδ ποτὶ τὸ κλ. ὁ δὲ ψ κύκλος ποτὶ τὸ β χωρίον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ κλ ποτὶ τὸ εζ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ γδ ποτὶ τὸ εζ. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὁμοίων ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι δυνάμει ποτ' ἄλλαλα, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι τᾶν τομᾶν.

τᾶν τῶν



Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστακούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας. οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δεδόσθω τις ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἀνεστακοῦσα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διὰ δὲ τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, καὶ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω ἐν αὐτῷ ἁ μὲν ἐλάσσων διάμετρος ἁ αβ. τὸ δὲ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ δ. ἁ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα ὀρθὰ ἁ γδ. πέρας δὲ αὐτᾶς τὸ γ. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν αβ ἐγγεγραμμένα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν γδ. δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ γ σαμεῖον. οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπὶ τᾶ α β εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ α διάχθω ἁ αζ, ὥστε τὸ περιεχόμενον ζ

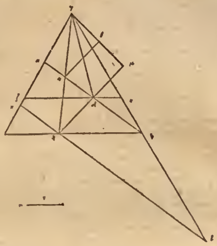
ὑπὸ τῶν α ε, ε ζ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ε γ, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας μείζονος διαμέτρου, ποτὶ τὸ ἀπὸ δ γ τετράγωνον. δυνατὸν δέ ἐστιν, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶς α δ, δ β περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ τετράγωνον. ἀπὸ δὲ τᾶς α ζ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ γ α ζ. ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν α ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἔστω, κορυφὰν ἔχων τὸ γ σαμεῖον. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, δειχθήσεται ἐοῦσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὴ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἀναγκαῖον εἶμεν τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ μή ἐστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω δὴ τι σαμεῖον, λελαμμένον ἐπὶ



τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἁ θ κ, ἐπὶ τὰν α β. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἐν ᾧ ἐντι ἁ γ α ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπὶ τὸ κ εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. συμπιπτέτω δὴ αὐτὰ τᾷ α ζ, κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζ α, ἁ λ μ, ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν α ζ. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐπὶ τᾶς περιφερείας αὐτοῦ. ἄχθω δὲ καὶ παρὰ τὰν α β, διὰ μὲν τοῦ λ ἁ ξ ο, διὰ δὲ τοῦ ε, ἁ π ρ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν ε α, ε ζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε γ τετράγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ε γ ποτὶ τὸ ὑπὸ ε π, ε ρ. καὶ ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν α ε, ε ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π ε, ε ρ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β. ἔστι δὲ ὡς μὲν τὸ ὑπὸ τᾶν α ε, ε γ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ε π, ε ρ. οὕτω τὸ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν λ ξ, λ ο. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β. τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξ λ, λ ο, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξ λ, λ ο ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ κ τετράγωνον. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ περιεχομένῳ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον. ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ τῷ περὶ τὰν α ζ κάθετος ἄχθη ἁ λ μ. τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ γ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τὰ γ θ μ σαμεῖα. ἁ δὲ γ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν, οὐκ ἄρα ἐστὶ σαμεῖον οὐδὲν ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιειλημμένου κώνου. ὅλα οὖν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου.

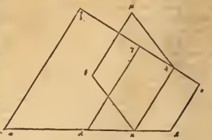
θ Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς μὴ ὀρθᾶς ἀνεστακούσας, ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐν ἐπιπέδῳ ἐστὶν ὀρθὸν ἀνεστακός, διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν, κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω δὲ διάμετρος μὲν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ β α, κέντρον δὲ τὸ δ. καὶ ἁ δ γ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα, ὡς εἴρηται. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν α β ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντι αἱ α β, γ δ. δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

νου τομά. οὐ δὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ α γ, γ β. ἐπεὶ ἁ γ δ οὐκ ἔστιν ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω δὴ ἴσα ἁ ε γ τᾷ γ β. ἁ δὲ ν δυνάσθω τὰ ἡμίσεια τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ἃ ἐστι συζυγὴς ἁ α β. καὶ διὰ τοῦ δ ἄχθω ἁ ζ κ παρὰ τὰν ε β. ἀπὸ δὲ τᾶς ε β ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ α γ, γ β. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ε β κύκλος, ἢ ἔλλειψις. εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ν, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζ δ, δ κ, κύκλος, εἰ δὲ μὴ ἐστιν ἴσον, ὀξυγωνίου κώνου τομὰ τοιαύτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε β τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ, δ κ. κῶνος λελάφθω κορυφὰν ἔχων τὸ γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ὁ κύκλος, ἢ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν ε β. δυνατὸν δέ ἐστι τοῦτο, ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ μέσαν τὰν ε β ἀχθεῖσα ὀρθά ἐντι ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ε β. ἐν ταύτᾳ δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ καὶ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α β. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔσται ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω τὸ σαμεῖον λελαμμένον τὸ θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἁ κ θ ἐπὶ τὰν α β, ἁ δὲ γ κ ἐπιζευχθεῖσα, ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τᾷ ε β κατὰ τὸ λ, διὰ δὲ τοῦ λ ἄχθω τις ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰν ε β ποτ' ὀρθὰς τᾷ ε β, ἁ λ μ. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. ἄχθω δὲ καὶ διὰ τοῦ λ παρὰ τὰν α β ἁ π ρ. ἔστιν δὴ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ, δ κ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ε λ, λ β. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ, δ κ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, οὕτως τὸ ὑπὸ ε λ, λ β ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π λ, λ ρ. ἐσσεῖται οὖν ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ α δ, δ β περιεχόμενον, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π λ, λ ρ. ἔχει δὲ ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β. ἐπεὶ ἐν τᾷ αὐτᾷ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ κάθετοί ἐντι ἀγμέναι ἐπὶ διάμετρον τὰν α β, τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π λ, λ ρ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶς α κ, κ β. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π λ, λ ρ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ γ τετράγωνον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐντὶ τὰ γ θ μ σαμεῖα. ἁ δὲ γ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν, φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.



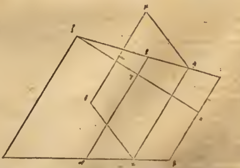
Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου 5
τομᾶς ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ὀρθὸν ἀνεστακὸς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ ἀνεστακούσᾳ γραμμᾷ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω τᾶς δοθείσας τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἑτέρα διάμετρος ἁ β α. κέντρον δὲ τὸ δ. ἁ δὲ γ δ γραμμὰ ἔστω ἀνεστακοῦσα ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς εἴρηται. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν α β ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ α β, γ δ. δεῖ δὴ κύλιν-

δὴ κύλινδρον εὑρεῖν, τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ γδ, ὅ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἀπὸ δὴ τῶν α, β σαμείων ἄχθω παρὰ τὰν γδ αἱ αζ, βη. ἁ δὴ ἑτέρα διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἤτοι ἴσα ἐντὶ τῷ διαστήματι τῶν αζ, βη, ἢ μείζων ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὴ πρότερον ἴσα τᾷ ζη. ἁ δὲ ζη ἔστω ποτ' ὀρθὰς τὰν γδ. ἀπὸ δὴ τᾶς ζη ἀνεστακέτω ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὰν γδ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον τὰν ζη. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὰν γδ. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ



τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἐστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. νοείσθω δή τι σαμεῖον λελαμμένον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ θ, ὃ οὐκ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν αβ ἁ θκ. ἐσσεῖται δὲ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ. ἀπὸ δὲ τοῦ κ ἄχθω παρὰ τὰν γδ ἁ κλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἀνεστακέτω ἁ λμ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζη ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν ζη. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ περιφερείᾳ τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ διάμετρον τὰν ζη. τὸ αὐτὸ δὴ ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τᾶς θκ καθέτου, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ακ, κβ περιεχόμενον, ὃ τὸ ἀπὸ ζγ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ περιεχόμενον. ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζη τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζλ, λη περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ακ, κβ περιεχόμενον λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ζγ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ αδ διὰ τᾶς ἐλλείψεως. ἴσον οὖν ἐντὶ τὸ ὑπὸ τᾶς ζλ, λη περιεχόμενον, τῷ ἀπὸ τᾶς θκ τετραγώνῳ. ἔστι δὲ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ λμ, ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ θκ, μλ κάθετοι. παράλληλοι οὖν ἐντὶ αἱ λκ, μθ. ὥστε καὶ αἱ δγ, μθ παράλληλοι ἐντὶ καὶ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου ἁ θμ. ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐόντος ἄκται παρὰ τὸν ἄξονα. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶν αὐτοῦ. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν. φανερὸν οὖν ἐστὶν ὃ ἔδει δεῖξαι. δῆλον δὴ, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ περιλαμβάνων τὰν ἔλλειψιν, ὀρθὸς ἐσσεῖται. εἴκα ἁ ἑτέρα διάμετρος ἴσα τῷ διαστήματι τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἀγμένων παρὰ τὰν ἀνεστακοῦσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω πάλιν ἑτέρα διάμετρος μείζων τᾶς ζη, καὶ ἴσα ἔστω ἁ πζ τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἀπὸ δὲ τᾶς πζ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν, ποτὶ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ β γδ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον τὰν πζ. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὰν δρ. ἐν

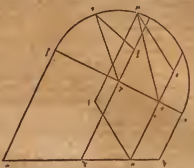


δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου, διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται οὖσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Ἀλλ' ἔστω ἐλάσσων ἁ ἑτέρα διάμετρος τᾶς ζη, ᾧ δὲ μείζων δύναται ἁ ζγ τᾶς ἡμισείας τᾶς

ἑτέρας

ἑτέρας διαμέτρου. ἴσον τὸ ἀπὸ τᾶς γξ τετράγωνον. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἀνεστακέτω γραμμὰ ἴσα τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ, ἁ ξν. τὸ δὲ ν νοείσθω μετέωρον. ἁ οὖν γν ἴσα ἐντὶ τᾷ γζ. ἐν δὴ τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ ζη, γν κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ζη. ἥξει δὲ οὗτος διὰ τοῦ ν, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν γδ. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ γὰρ μὴ ἐστίν, ἐσσεῖται τι σαμεῖον ἐπ᾽ αὐτᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. λελάφθω δή τι σαμεῖον



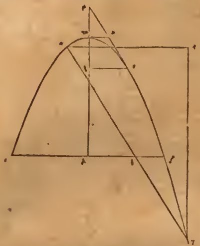
ἐπ᾽ αὐτᾶς τὸ θ. καὶ ἁ θκ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν αβ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ παρὰ τὰν γδ ἔστω ἁ κλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἄχθω ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ ζη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ περὶ διάμετρον τὰν ζη, ἁ λμ. νοείσθω δὲ τὸ μ ἐπὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ τὰν ζη. καὶ ἀπὸ τοῦ μ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν κλ ἐκβληθεῖσαν, ἁ μο. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ. ἐπεὶ ποτ᾽ ὀρθάς ἐντὶ ἁ κλ τᾷ ζη, ἐσσεῖ δὴ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς μο ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς μλ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ξν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς νγ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς μλ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς μλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν λζ, λη περιεχομένῳ. τῷ δὲ ἀπὸ τᾶς γν τὸ ἀπὸ τᾶς γζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς μο τετράγωνον ποτὶ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς νξ ποτὶ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐντὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ξν ποτὶ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ξν τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου. δῆλον οὖν ὅτι ἴσα ἐντὶ αἱ μο, θκ κάθετοι. ὥστε ἴσαι αἱ κθ, θμ. ἐπεὶ δὲ ἁ μθ παρὰ τὸν ἄξονα ἐντὶ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τὸ μ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ἀναγκαῖον καὶ τὰν μθ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντὶ αὐτοῦ. οὐκ ἦν δέ. δῆλον οὖν ὅτι ἀναγκαῖον ἐστὶ τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου.

Ὅτι μὲν πᾶς κῶνος ποτὶ κῶνον τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ τῶν βάσεων λόγου, καὶ ια
ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων, ἀποδέδεικται ὑπὸ τῶν πρότερον. ἁ αὐτὰ δὲ ἀπόδειξις ἐντί. καὶ διότι πᾶν ἀπότμαμα κώνου ποτὶ ἀπότμαμα κώνου τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει, ἔκ τε τοῦ τῶν βάσεων λόγου, καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων. καὶ ὅτι πᾶς τόμος κυλίνδρου, τριπλάσιός ἐστι τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τόμῳ, καὶ ὕψος ἴσον, ἁ αὐτὰ ἀπόδειξις, ἅπερ καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ὕψος ἴσον.

Εἴκα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ιβ
ὀρθογωνίου κώνου τομὰ αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἐσσεῖται, ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἀχθέντος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον. εἰ δέ κα τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα, εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα ὁμοία αὐτᾷ. εἰ δὲ καὶ διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, οὐχ ὁμοία. διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται, ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἴκα τμαθῇ ὀρθῷ τῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν καὶ διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα. εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα ὁμοία αὐτᾷ, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται ἁ κοινὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέν-

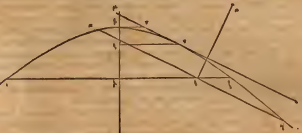
τος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἰ δὲ καὶ τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἶπα τῶν εἰρημένων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, αἱ ἀπὸ τῶν σαμείων τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος μὴ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἐόντων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἐντὸς πεσοῦνται τᾶς τοῦ σχήματος τομᾶς. τούτων δὲ πάντων φανερόν ἐστι αἱ ἀποδείξιες.

ιγ Εἴκα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μήτε διὰ τοῦ ἄξονος, μήτε παρὰ τὸν ἄξονα, μήτε ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ, ἀπὸ τᾶς γινομένας τομᾶς τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐσσεῖται τῷ διαστήματι τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα, ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς μείζονος διαμέτρου. τετμάσθω γὰρ τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἄλλῳ, διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. ἔστω τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἁ α β γ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἁ γ α εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ κωνοειδέος, καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. δεικτέον ὅτι ἁ τομὰ τοῦ κωνοειδέος, ἁ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰν α γ, ὀξυγωνίου ἐστὶ κώνου τομά. καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ μείζων ἐστὶν ἁ α γ. ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐστὶ τᾷ λ α, τᾶς μὲν γ λ παρὰ τὰν β δ ἐούσας, τᾶς δὲ α λ καθέτου ἐπὶ τὰν γ λ. νοείσθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν γ α, ἁ κ θ. ἐσσεῖται οὖν ἁ κ θ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ α γ β ὀρθογωνίου κώνου τομά. διότι καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. διὰ δὲ τοῦ θ ἄχθω ἁ ε ζ ὀρθὰς ποιοῦσα γωνίας ποτὶ τὰν β δ. καὶ διὰ τᾶν ε ζ, κ θ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω. ἐσσεῖται δὲ τοῦτο ὀρθὸν ποτὶ τὰν β δ. τετμάσεται δὲ τὸ κωνοειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ δ. ἁ ἄρα κ θ ἴσον δυνασεῖται τῷ ὑπὸ ζ θ, θ ε. ἡμικύκλιον γάρ ἐστι τὸ ἐπὶ τᾶς ε ζ. καὶ ἁ κ θ κάθετος οὖσα, μέσα γίνεται ἀνὰ λόγον τᾶν ὑπὸ τᾶν ε θ, θ ζ περιεχομένων. ἄχθω δὲ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ μὲν μ ν παρὰ τὰν α γ, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ ν. ἁ δὲ β τ παρὰ τὰν ε ζ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ε θ, θ ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ν τ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β τ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. τᾷ δὲ ν τ ἴσα ἐστὶν ἁ τ μ. διότι καὶ ἁ β ε τᾷ β μ. ἔχει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς τ μ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ β. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ καθέτου τετράγωνον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ περιεχόμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ μ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ γ α λ, τ μ β τρίγωνα, ὁμοίως δειχθήσονται καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλαν καθέτων τετράγωνα, τᾶν ἀγομένων ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ, ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς α γ τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α λ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α γ. δῆλον οὖν ὅτι ἁ τομά ἐστιν ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετροι δὲ αὐτᾶς εἰσὶν ἁ μὲν μείζων ἁ α γ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἴσα τᾷ α λ.



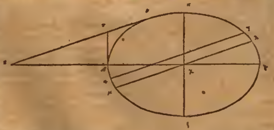
ιδ Εἴκα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διά-

μα. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται, ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀπὸ τᾶς γινομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων, τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. τεμνέσθω γὰρ τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται. καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἁ α β γ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου ἁ α γ εὐθεῖα. ἄξων δὲ τοῦ κωνοειδέος



καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. νοείσθω δή τι ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον σαμεῖον τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν α γ, ἁ κ θ. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ α β γ κώνου τομά. διὰ δὲ τοῦ θ ἄχθω ἁ ε ζ ποτ' ὀρθὰς τᾷ β δ. καὶ διὰ τᾶν ε ζ, κ θ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἄχθω, τέμνον τὸ κωνοειδές. τετμάσεται δὴ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ δ. ἁ ἄρα κάθετος ἁ κ θ ἴσον δυνασεῖται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ε θ, θ ζ. ἄχθω δὲ πάλιν ἁ μὲν μ ν παρὰ τὰν α γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ ν. ἁ δὲ β τ παρὰ τὰν ε ζ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ ε θ, θ ζ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β τ πρὸς τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὥστε τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὁμοίως οὖν δειχθησοῦντι, καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλαν καθετᾶν τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἀγομένων ἐπὶ τὰν α γ ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς α γ, ὧν αἱ κάθετοι ποιοῦντι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. καὶ ἔστιν ἐλάσσων ἁ β τ τᾶς τ ν. διότι καὶ ἁ μ τ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς τ ν. καὶ γὰρ ἁ μ β, ἐλάσσων τᾶς β ρ. ἴσα γάρ ἐστιν ἐν ταῖς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομαῖς συμπίπτῃ. δῆλον ὅτι ἁ τομά, ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἐστὶ διάμετρος αὐτᾶς μείζων ἁ α γ. ὁμοίως καὶ ἐπεί ἐστι τᾶς ν ρ ἐν τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ, διάμετρος ταύτας μείζων ἐστὶν ἁ γ λ.

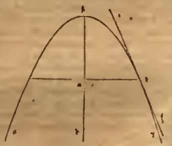
Εἴκα καὶ τὸ παραμακὲς σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται, ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ ἀπὸ τᾶς γινομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων, τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἰ μὲν οὖν κατατμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, δῆλον. τετμάσθω δὲ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον τοῦ σφαιροειδέος τομά. ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος αὐτὸ ἐπιπέδου, ἁ γ α εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω ιε



τοῦ σφαιροειδέος, καὶ διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ β δ. κέντρον δὲ τὸ χ. καὶ ἐλάσ-

σαν διάμετρος ἴσα ἁ π ρ. ἄχθω δὲ ἁ μὲν β τ ποτ' ὀρθὰς τᾷ β δ, ἁ δὲ ν τ παρὰ ταν α γ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ ν. ἄχθω δὲ καὶ ἁ ν λ διὰ τοῦ χ παρὰ ταν α γ. ὁμοίως δὲ δείξομεν τοῖς πρότερον δεδειγμένοις, ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν καθέτων τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ ταν α γ ἀγομένας ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς α γ τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὅτι μὲν οὖν ἁ τομὰ ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ γ α, δῆλον. ὅτι δὲ μείζων, δεικτέον. τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν π χ, χ ρ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ μ χ, χ λ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ν τ. ἐπεὶ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἐντὶ αἱ π ρ, μ λ. ἔλασσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ τᾶν π χ, χ ρ περιεχόμενον τοῦ ὑπὸ τᾶν μ χ, χ λ. ἐπεὶ καὶ ἁ χ π τᾶς χ λ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν καθέτων τετράγωνα τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ ταν α γ ἀγομέναν ἐλάσσονα ἐντὶ τῶν ὑπὸ τᾶν τμαμάτων τᾶς α γ περιεχομένων. δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐντὶ διάμετρος ἁ γ α, αἴκα τὸ ἐπιπλατὺ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ ἐσσεῖται. τᾶν δὲ διαμέτρων ἐλάσσων ἐσσεῖται ἁ ἐν τῷ ἀπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ. ἐξ αὐτῶν δὲ φανερὸν ἐν πᾶσι τοῖς σχημάτεσσιν, ὅτι αἴκα παραλλάλοις ἐπιπέδοις τμαθῇ, αἱ αὐτῶν τομαὶ ὁμοῖαι ἐσσοῦνται. τὰ γὰρ τετράγωνα τᾶν ἀπὸ τᾶν καθέτων ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν τμαμάτων τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦντι.

ιε Εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀπὸ παντὸς ὁποιουοῦν σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κωνοειδέος ταὶ ἀγόμεναι εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτοῦ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ σαμείου, ἀφ' οὗ ἁ παράλλαλος ἄγεται τῷ ἄξονι, τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ὁ ἄξων τοῦ κωνοειδέος. ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ, ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἀγομέναν παρὰ τὰν διάμετρον εὐθεῖαν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι ἐφ' ἅ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτᾶς, ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ τὰ θάτερα ἐντός. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν. ἐν τῷ ἀμβλυγωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ τὰν ἀγομέναν εὐθεῖαν παρά τινα γραμμάν, ἅ ἐστιν ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἅ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτοῦ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος· αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, καὶ διὰ τοῦ σαμείου ἀφ' οὗ ἄγεται ἁ εὐθεῖα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένα. ἐν δὲ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τοῦ ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς τὰν ἀγομέναν εὐθεῖαν παρὰ τὰν εἰρημέναν γραμμάν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἅ ἐστιν αὐτᾶς τὰ κυρτὰ ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.



εἴκα τῶν κωνοειδέων σχημάτων ἐπίπεδον ἐφάπτηται, μὴ τέμνον τὸ κωνοειδές, καθ' ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον. καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ἐφαπτέσθω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὲ δύο σαμείων καθ' ἃ ἅπτεται τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, καὶ ἀφ' ἑκατέρου παρὰ τὸν ἄξονα εὐθεῖαν ἀχθεισᾶν. ἀπὸ δὲ ταν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα ἐπίπεδον ἐκβληθέν, ἤτοι διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα ἐσσεῖται ἀγμένον. ὥστε τὰν τομὰν ποιήσει κώνου τομάν, καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἐπεὶ οὖν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντί, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ὥστε καὶ τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἔστι δὲ ἁ εὐθεῖα αὐτὰ ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ. διότι καὶ τὰ σαμεῖα. τοῦ ἄρα ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ κωνοειδέος, ὅπερ ἀδύνατον. ὑπέκειτο γάρ, μὴ τέμνειν. καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅψεται σαμεῖον. ὅτι δὲ καὶ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος, ἐφάπτηται δῆλον. ἀχθέντων γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος δύο ἐπι-

δύο ἐπιπέδων τοῦ κωνοειδέος αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται κώνων τομαὶ, διαμέτρον ἔχουσαι τὸν ἄξονα. τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου αἱ εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τᾶν τῶν κώνων τομᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου ὀρθὰς ποιοῦντι γωνίας ποτὶ τὰν διάμετρον. ἐσσοῦνται οὖν ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὀρθὸν οὖν ἐσσεῖται ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος. ἀλλὰ ἔστω μὴ ἐπὶ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος ἐπιψαῦον τὸ ἐπίπεδον. ἄχθω δὴ ἐπίπεδον διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος. καὶ τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ, ἔστω ἁ β γ κώνου τομά. ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου τομὰ, ἔστω ἁ ε θ ζ εὐθεῖα, τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἁπτομένα ἐπὶ τὸ θ. ἀπὸ δὲ τοῦ θ καθετὸς ἄχθω ἐπὶ τὰν β δ, ἁ θ κ καὶ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ἐπὶ τὸν ἄξονα. ποιήσει δὲ τοῦτο τὰν τομὰν κύκλον, οὗ κέντρον τὸ κ. ἁ δὲ τομὰ τούτου τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιψαύοντος ἐσσεῖται ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου, ὀρθὰς ἄρα ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν θ κ. ὥστε ὀρθὰ ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ κ θ, β δ. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπεὶ καὶ αἱ ἐν αὐτῷ εὐθεῖαι.

Εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπίπεδον ἅπτηται μὴ τέμνον τὸ σχῆμα, καθ' ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον, καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ἁπτέσθω γὰρ ἐπὶ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὲ τῶν σαμείων καθ' ἃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἀφ' ἑκατέρου αὐτῶν παρὰ τὸν ἄξονα εὐθεῖαι ἀχθῶσι, καὶ διὰ τῶν ἀχθεισῶν ἐπιπέδου ἐκβληθέντος ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. ὥστε καὶ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἔστι δὲ ἁ εὐθεῖα ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ, διότι καὶ τὰ σαμεῖα. τοῦ οὖν ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου, ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ σφαιροειδέος. οὐκ ἔστι δὲ, ὑπέκειτο γὰρ μὴ τέμνειν. δῆλον οὖν ὅτι καθ' ἓν σαμεῖον μόνον ἅψεται. ὅτι δὲ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς, καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν, ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον, ὁμοίως δείκνυται τοῖς ἐπὶ τῶν κωνοειδέων σχημάτων. εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ τᾶς γενομένας τομᾶς ἐπιψαύουσα τις ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ διὰ τᾶς ἐπιψαυούσας ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν ποτὶ τὸ τέμνον, ἐπιψαύσει τοῦ σχήματος ἐπὶ τὸ αὐτὸ σαμεῖον, καθ' ὃ καὶ ἁ εὐθεῖα ἐπιψαύει τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. οὐ γὰρ ἅψεται κατ' ἄλλο σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ. εἰ δὲ μὴ, ἁ ἀπὸ τοῦ σαμείου καθετὸς ἀγομένα ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον πεσεῖται ἐκτὸς τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. ἐπεὶ γὰρ τὰν ἐπιψαύουσαν πεσεῖται. ἐπεὶ ὀρθά ποτ' ἄλλαλα ἐντὶ τὰ ἐπίπεδα, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ὅτι ἐντὸς πεσεῖται. ιζ

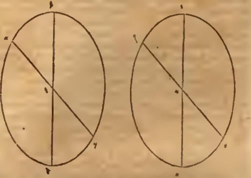
Εἴκα τῶν σφαιροειδέων τινὸς σχημάτων δύο ἐπίπεδα παράλλαλα ἐπιψαύοντι, ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύσεται. ὅτι μὲν οὖν κατ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι τὰ ἐπίπεδα ἐόντι, δῆλον. ἀλλ' ἔστω μὴ ποτ' ὀρθάς. τὸ δὴ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ ἄξονος καὶ τᾶς ἁφᾶς τᾶς ἑτέρας, ὀρθὸν ἐσσεῖται πρὸς τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ὥστε καὶ ποτὶ τὸ παράλλαλον αὐτῷ. ἀναγκαῖον ἄρα τὸ αὐτὸ εἶμεν ἐπίπεδον, ὃ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἑκατέρας ἁφᾶν ἀγμένον. εἰ δὲ μὴ ἐσσοῦνται δύο ἐπίπεδα ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὀρθὰ διὰ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ἀγμένα. οὐκ ἐούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον. ὑπέκειτο γὰρ ὁ ἄξων μὴ εἶμεν ὀρθὸς ποτὶ τὰ παράλλαλα ἐπίπεδα. ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα ἐσσοῦνται ἐπιπέδῳ ὅ τε ἄξων καὶ αἱ ἁφαὶ, καὶ τετμαμένον ἐσσεῖται τὸ σφαιροειδὲς διὰ τοῦ ἄξονος. ἁ οὖν τομὰ ἐσσεῖται, ὀξυγωνίου κώνου τομά. αἱ δὲ τῶν ἐπιψαυουσᾶν ἐπιπέδων τομαὶ παράλλαλοι ἐσσοῦνται αἱ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπὶ τὰς ἁφὰς τῶν ἐπιπέδων. εἰ δ' ἔκα δύο εὐθεῖαι ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιψαύοντι παράλλαλοι ἐοῦσαι, τό τε κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, καὶ αἱ ἁφαὶ ἐπ' εὐθείας ἐντί. ιη

Εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν δύο παράλλαλα ἐπίπεδα ἀχθῇ ἐπιψαύοντα, ἀχθῇ δὲ τι ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος παρὰ τὰ ἐπιψαύοντα, αἱ διὰ τᾶς γενομένας τομᾶς ἀγόμεναι παρὰ τὰν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. ὑποκείσθω τὰ εἰρημένα, καὶ λελάφθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς γεγενημένας τομᾶς. καὶ διὰ τοῦ γενομένου σαμείου, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσας ἐπίπεδον ἄχθω. τέμνει δὲ τοῦτο τὸ σφαιροειδὲς καὶ τὰ παράλλαλα ἐπίπεδα. ἔστω οὖν ἁ μὲν τοῦ ιθ



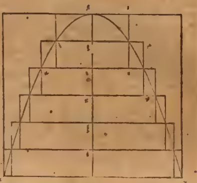
σφαιροειδέος τομὰ ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. αἱ δὲ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἐπιψαυόντων τομαὶ, αἱ ε ζ, η θ εὐθεῖαι. τὸ δὲ λαφθὲν σαμεῖον, τὸ α. ἁ δὲ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα ἔστω ἁ β δ. πεσεῖται δὴ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου. ἁ δὲ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου τοῖς ἐπιψαυόντεσσιν ἐπιπέδοις τομὰ ἁ γ α. ἐσσεῖται δὲ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένα, ἐπεὶ καὶ τὸ ἐπίπεδον. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ἁ α β γ δ, ἤτοι κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ. καὶ ἐπιψαύοντι αὐτᾶς αἱ δύο εὐθεῖαι αἱ ε ζ, η θ. διὰ δὲ τοῦ κέντρου παράλληλος αὐταῖς ἁ α γ. δῆλον ὡς αἱ ἀπὸ τῶν α γ ἀγόμεναι σαμείων παρὰ τὰν β δ ἐπιψαύοντι τᾶς τομᾶς, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. εἰ δὲ καὶ τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῖς ἐπιψαυόντεσσι σαμείοις, μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένον, ἦ ὡς τὸ κ λ. δῆλον ὡς τὰν ἐκ τᾶς τομᾶς τὰν γενομέναν εὐθεῖαν, αἱ μὲν περὶ τὰ αὐτὰ γενόμεναι τῷ ἐλάσσονι τμάματι, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

κ Πᾶν σχῆμα σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθὲν διὰ τοῦ κέντρου, δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι δὴ καὶ διὰ τοῦ ἄξονος ἐσσεῖται τετμαμένον, ἢ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ ἄξονος τέμνεται, ἢ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, δῆλον ὡς δίχα τέμνεται τό αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. φανερὸν γὰρ ὅτι ἐφαρμόζει τὸ ἕτερον μέρος αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἕτερον, καὶ ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου μέρεος ἐπὶ τὰν ἑτέρου. ἀλλ' ἔστω μὴ διὰ τοῦ ἄξονος τετμαμένον, μήτε ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. τμαθέντος δὴ τοῦ σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτοῦ μὲν τοῦ σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἔστω καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, ἁ β δ. καὶ κέντρον τὸ θ. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τετμακότος διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος, ἔστω τομὰ ἁ α γ εὐθεῖα. λελάφθω δὴ καὶ ἄλλο σφαιροειδὲς, ἴσον καὶ ὅμοιον τούτῳ. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τομὰ, ἔστω ἁ ε ζ η ν ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ ε η, καὶ κέντρον τὸ κ. καὶ διὰ τοῦ κ ἄχθω ἁ ζ ν γωνίαν ποιοῦσα τὰν κ, ἴσαν τᾷ θ. ἀπὸ δὲ τᾶς ζ ν ἐπίπεδον ἔστω ἀνεστακὸς ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ε ζ η ν τομά. ἐντὶ δὴ αἱ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ, αἱ α β γ δ, ε ζ η ν, ἴσαι καὶ ὅμοιαι ἀλλάλαις. ἐφαρμόζοντι οὖν ἐπ' ἀλλάλας τεθείσας τᾶς ε η ἐπὶ τὰν β δ, καὶ ἁ ζ ν ἐπὶ τὰν α γ. ἐφαρμόζει δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ περὶ τὰν ν ζ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ περὶ τὰν α γ. ἐπεὶ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀμφότερα ἐντὶ, ἐφαρμόζει οὖν καὶ τὸ τμᾶμα τὸ ὑπὸ ἐπιπέδου ἀποτεμνόμενον τοῦ περὶ τὰν ν ζ, ἀπὸ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ἐπὶ τὰ ε τῷ ἑτέρῳ τμάματι τῷ ἀποτεμνομένῳ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου σφαιροειδέος, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ περὶ τὰν α γ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β. καὶ λοιπὸν τμᾶμα ἐπὶ τὸ λοιπόν. καὶ ἁ ἐπιφάνεια τῶν τμαμάτων ἐπὶ τὰς ἐπιφανείας. πάλιν δὲ καὶ τεθείσας τᾶς ε η ἐπὶ τὰν β δ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν ε περὶ τὸ δ κεῖσθαι, τὸ δὲ η περὶ τὸ β. τὰ δὲ μεταξὺ τῶν ν ζ σαμείων γραμμὰν ἐπὶ τὰν μεταξὺ τῶν α γ σαμείων. δῆλον ὡς αἱ τε τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἐφαρμόζοντι ἐπ' ἀλλάλας. καὶ τὸ μὲν ζ ἐπὶ τὸ γ πεσεῖται, τὸ δὲ ν ἐπὶ τὸ α. ὁμοίως καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ περὶ τὰν ν ζ, ἐφαρμόζει τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν α γ, καὶ τῶν τμαμάτων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ν ζ. τὸ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ η ἐφαρμόζει τῷ τμάματι, τῷ ἀποτεμνομένῳ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ περὶ τὰν α γ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β. τὸ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ ε τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ δ. ἐπεὶ δὲ τὸ αὐτὸ τμᾶμα ἑκατέρῳ τῶν τμαμάτων ἐφαρμόζει, δῆλον ὅτι ἴσα ἐντὶ τὰ τμάματα. διὰ ταῦτα δὲ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι.



Τμάματος

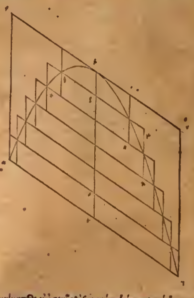
Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων, ἀποτετμημένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν, μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ὁμοίως ἀποτετμημένου, δυνατόν ἐστι εἰς τὸ τμᾶμα στερεὸν ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ κυλίνδρων ἴσον ὕψος ἐχόντων τῶν συγκειμένων. ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονι ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δεδόσθω τμᾶμα, οἷον ἐστὶ τὸ αβγ. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τμάματος, τομὰ ἔστω ἁ αβγ κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ αγ εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς, ἁ βδ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον ὀρθὸν ἦμεν ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐστί, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ γα. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὸν βδ. πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ δὴ ἐστὶν ἤτοι κωνοειδές, ἢ σφαιροειδὲς μὴ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, τοῦ δὴ κυλίνδρου τούτου ἀεὶ δίχα τεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἐσσεῖται ποτὲ τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. ἔστω δὲ τὸ καταλελειμμένον ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρος, ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὸν εδ, ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διαιρήσθω δὴ ἁ βδ εἰς τὰς ἴσας τᾷ εδ, κατὰ τὰ ρ ο, π ξ. καὶ ἀπὸ τῶν διαιρεσίων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν αγ ἕως ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω ὀρθὰ ποτὶ τὰν βδ. ἐσσεῦνται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, τὰ κέντρα ἔχοντες ἐπὶ τᾶς βδ. ἐφ' ἑκάστου δὴ τῶν κύκλων δύο κύλινδροι ἀναγεγράφθων, ἑκάτερος ἔχων ἄξονα ἴσον τῷ εδ, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ κυλίνδρου ἐφ' ἃ ἐστὶ τὸ δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐφ' ἃ ἐστὶ τὸ β. ἐσσεῖται δή τι ἐν τῷ τμάματι σχῆμα στερεὸν ἐγγεγραμμένον ἐκ τῶν κυλίνδρων συγκείμενον τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ' ἃ ἐστὶ τὸ δ. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, καὶ συγκείμενον ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων τῶν ἐφ' ἃ τὸ β ἐστί. λοιπὸν δὲ δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος, ἕκαστος δὴ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἴσος ἐστὶ τῷ κυλίνδρῳ τῷ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἀναγραφομένῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὸ β, ὡς ὁ μὲν θη τῷ θι, ὁ δὲ κλ τῷ κμ. καὶ οἱ ἄλλοι ὡσαύτως. καὶ πάντες δὲ οἱ κύλινδροι πᾶσιν ἴσοι ἐντί. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ κυλίνδρῳ, τῷ βάσιν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν εδ. οὗτος δ' ἐστὶν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. κα



Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων ἀποτετμημένου ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ὁμοίως ἀποτετμημένου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ τμᾶμα στερεὸν ἐγγράψαι ἐκ κυλίνδρων τμαμάτων ὕψος ἴσον ἐχόντων τῶν συγκειμένων. ἔστω τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δεδόσθω τμᾶμα οἷον εἴρηται. τμαθέντος δὲ τοῦ σχήματος ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ, ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ δοθὲν τμᾶμα. τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγ δ κώνου τομά. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα, ἁ γα εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ τμᾶμα μὴ ἦμεν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ δγ. ἁ φν ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ β, καὶ ἀπὸ τᾶς φν ἀνεστακέτω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν αγ, ἐπιψαύσει δὴ αὐτὸ τοῦ σχήματος κατὰ τὸ β. καὶ εἰ μὲν ἐστὶ τὸ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀπὸ τοῦ β ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα ἁ βδ. εἰ δὲ ἀμβλυγωνίου, ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐπὶ τὸ β ἐκβεβλήσθω, ἁ βδ. εἰ δὲ σφαιροειδέος ἐπὶ τὸ β ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολελάφθω ἁ βδ. δῆλον δὲ ὅτι τέμνει ἁ βδ δίχα τὰν αγ. ἔστιν οὖν τὸ μὲν β κορυφὰ τοῦ τμάματος, ἁ δὲ βδ, κβ

εὐθεῖα

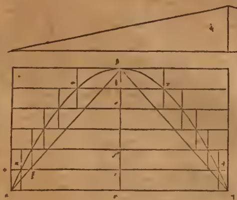
διάγεται ἄξων. ἔστι δὲ καὶ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α γ. ἁ γραμμὰ ἁ β δ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα ἐν ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἐόντος τοῦ ἐπιπέδου.



δυνατὸν οὖν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν ἄξονα ἔχοντα τὰν β δ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α γ. πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ ἐστιν ἤτοι κωνοειδὲς ἢ σφαιροειδὲς τμᾶμα, καὶ οὐ μεῖζον ἐστιν ἡμίσεως τοῦ σφαιροειδέος. ἐσσεῖται δέ τις κυλίνδρου τόμος, βάσιας μὲν ἔχων τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάς, τὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. τοῦ μὲν τόμου δίχα τεμνομένου ἐπιπέδοις παραλλήλοις τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν α γ, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. Ἔστω τόμος βάσιν μὲν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν ε δ, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διῃρήσθω δὴ ἁ α β εἰς τὰς ἴσας τᾷ δ ε, καὶ ἀπὸ τᾶν διαιρεσίων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν α γ, ἔστε ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακέτων παράλληλα τῷ κατὰ τὰν α γ ἐπιπέδῳ, τέμνοντι δὲ ταῦτα τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τμάματος, καὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ὁμοῖαι τᾷ περὶ τὰν α γ διάμετρον. ἐπεὶ παράλληλα ἐντὶ τὰ ἐπίπεδα. ἐφ' ἑκάστας δὴ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀναγεγράφθωσαν κυλίνδρου τομοὶ δύο, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τῷ δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β, ἄξονα ἔχοντες ἴσον τῷ δ ε. ἐσσοῦνται δή τινα σχήματα στερεὰ τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, τὸ δὲ περιγεγραμμένον ἐκ κυλίνδρου τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. λοιπὸν δέ ἐστιν δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δειχθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ τόμῳ, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάν, τὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν ε δ. οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

κγ Τούτων προγεγραμμένων ἀποδείκνυμες τὰ προβεβλημένα τῶν σχημάτων. πᾶν τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἡμιόλιον ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα. ἔστω γὰρ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀποτετμημένον ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, τᾶς μὲν ἐπιφανείας τομὰ ἔστω ἁ α β γ ὀρθογωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ γ α εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ β δ. ἔστω δὲ καὶ κῶνος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. οὗ κορυφὰ τὸ β. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. ἐκκείσθω γὰρ κῶνος ὁ ψ, ἡμιόλιος ὢν τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἐσσεῖται οὖν ὁ ψ κῶνος ἡμίσεος ὅλου τοῦ κυλίνδρου. ἐπείπερ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ ψ κῶνος τοῦ αὐτοῦ κώνου. λέγω, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον ἐστὶ τῷ ψ κώνῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἐντὶ ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ σχῆμα στερεὸν εἰς τὸ τμᾶμα, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων, ὕψος ἴσον ἐχόντων τῶν συγκειμένων, ὥστε τὸ περιγεγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγεγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι τηλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ

μα τοῦ ὀρθογωνίου κώνου. καὶ ἔστω τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν, ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν ε δ. ἐλάχιστος δὲ, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ς τ, ἄξονα δὲ τὰν β θ. τῶν δὲ κυλίνδρων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν ἔστω, ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ. ἄξονα δὲ τὰν δ ε. ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ς τ, ἄξονα δὲ τὰν θ ι. ἐκβεβλήσθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἔσσεται δὴ ὅλος κύλινδρος

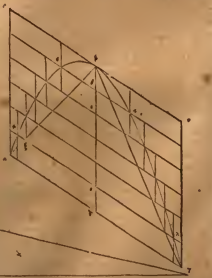


διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸ τμᾶμα, ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι μεῖζόν ἐστι τοῦ ὀρθογωνίου κώνου. ὁ δὴ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν κ ε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β ε, καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ δ α ποτὶ τὰν ε ξ. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ὁ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὸν ε ζ, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ π ε, τουτέστιν ἁ δ α ποτὶ τὰν ζ ι. καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν, ἕξει τὸν τὸν λόγον ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν α β, β δ εὐθειᾶν. καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξων δέ ἐστιν ἁ δ γ εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ἐν τῇ βάσει ἐντὶ τῶν εἰρημένων κυλίνδρων, ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπολελαμμένας ἀπὸ τᾶς μεταξὺ τᾶν α β, β δ. αἱ δὲ εἰρημέναι εὐθεῖαι τῶν εἰρημένων χωρὶς τᾶς α δ μείζονες ἐντὶ ἢ διπλάσιαι. ὥστε καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, οὗ ὁ ἄξων ὁ δ ι μείζονές ἐντι, ἢ διπλάσιοι τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. πολλῷ ἄρα καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος, οὗ ὁ ἄξων ἁ δ β, μείζων ἐστὶν ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τοῦ δὲ ὀρθογωνίου κώνου ἦν διπλασίων. ἔλασσον ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ὀρθογωνίου κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ κωνοειδὲς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου. ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἔλασσον. πάλιν γὰρ ἐγγεγράφθω τὸ σχῆμα, καὶ περιγεγράφθω, ὥστε ὑπερέχειν ἕκαστον ἔλασσον. ἢ πάλιν κων ὑπερέχει ὁ ὀρθογωνίου κῶνος τοῦ κωνοειδέος. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ τὸ ἐγγραφὲν τοῦ περιγραφέντος ἐλάσσονι λείπεται, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κώνου, δῆλον ὡς ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ὀρθογωνίου κώνου. πάλιν δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τᾷ ε δ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ αὐτό. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ε ζ, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ε ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν κ ε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β ε, καὶ τῷ ὃν ἔχει ὁ δ α ποτὶ τὰν ε ξ, καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος

ι τῶν ἐν

τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν, ἑξεῖ τὸν λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς βάσιος αὐτῶν ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ᾽ αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν αβ, βδ εὐθειᾶν. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἄξων ἐστὶν ἁ βδ εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας. αἱ δὲ εὐθεῖαι πᾶσαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων οἱ βάσεις ἐντὶ τῶν κυλίνδρων πρὸς τὰν εὐθεῖαν πᾶσαν τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ᾽ αὐτᾶν σὺν τᾷ αδ ἐλάσσονες ἐντὶ, ἢ διπλάσιαι. δῆλον οὖν ὅτι καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ἐλάσσονές ἐντι ἢ διπλάσιοι τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλάσιος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δὲ, ἀλλὰ μάζων ἢ διπλάσιος. τοῦ γὰρ ψ κώνου διπλάσιόν ἐστι. τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐκ μάζον, ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

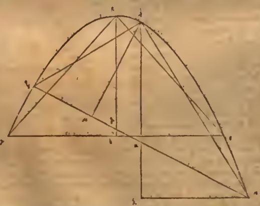
κ̄δ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὁμοίως ἡμιόλιον ἔσσεται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ὡς εἴρηται. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ σχῆμα, τοῦ μὲν σχήματος ἔστω ἁ αβγ ὀρθογωνίου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα ἁ αγ εὐθεῖα. ἄχθω δὲ παρὰ τὰν αγ ἁ φυ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ β, καὶ ἁ βδ ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα. τέμνει δὴ αὐτὰ δίχα τὰν αγ. ἀπὸ δὲ τᾶς φυ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω παράλληλον κατὰ τὸ τὰν αγ. ἐπιψαύει δὲ τοῦ κωνοειδὲς κατὰ τὸ β. καὶ ἐσσεῖται τοῦ τμάματος κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ βδ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν αγ, οὐ ποτ᾽ ὀρθὰς ἐὸν τῷ ἄξονι τέτμηκε τὸ κωνοειδὲς, ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μάζων ἁ αγ, ἔστω δὴ ὀξυγωνίου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν γα, καὶ γραμμᾶς τᾶς βδ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἀνεστακοῖσα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἀνεστακότι ἀπὸ διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον. ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ᾽ εὐθείας τᾷ βδ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δυνατὸν δὲ ἐστὶ καὶ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐσσεῖται. τόμος κυλίνδρου τις, βάσιν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάν, τὰν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ. καὶ ἀπότμαμα κώνου βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τε τόμῳ καὶ τῷ τμάματι, ἄξονα δὲ τὸν αὐτόν. δεικτέον ὅτι τὸ κωνοειδὲς τμᾶμα, ἡμιόλιόν ἐστι τούτου τοῦ κώνου. ἔστω δὴ ὁ ψ κῶνος ἡμιόλιος τοῦ ἀποτμάματος τούτου. ἐσσεῖται δὴ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου, ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, διπλάσιος τοῦ ψ κώνου. οὗτος γὰρ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, τὸ εἰρημένον τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τόμου τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν μὲν



ἔχον

σιν τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἀναγκαῖον δὲ ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ἴσον ἦμεν τῷ τοῦ κώνου. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὲ πρότερον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δή τι ἐς τὸ τμᾶμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ τοῦ κώνου. καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν τομῶν ἐσσεῖται ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πάλιν δὲ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλους ταῖς βάσεσιν. αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν ἐπεὶ ὅμοιαι ἐντὶ ὀξυγωνίου κώνου τομαὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐταῖς δυνάμει. ἡμίσεαι δ' ἐντὶ τῶν ὁμολόγων διαμέτρων, αἱ α δ, κ ε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α δ ποτὶ τὰν κ ε δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β ε μάκει. ἐπεὶ ἁ μὲν β δ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστιν. αἱ δὲ α δ, κ ε παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β ε, τοῦτον ἔχει ἁ α δ ποτὶ τὰν ε ξ. ἕξει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν λόγον, ἐν ᾧ ἁ α δ ποτὶ τὰν ε ξ, καὶ τῶν ἄλλων τομῶν ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἴσον ἐχόντων τᾷ δ ε, πρὸς ἕκαστον τῶν τομῶν τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἄξονα ἐχόντων, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τῶν βάσιων αὐτῶν ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τῶν α β, β δ. δειχθήσεται οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ τοῦ κώνου, ὁ δὲ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, μείζων ἐὼν ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ὥστε καὶ τοῦ τοῦ κώνου μείζων ἐσσεῖται ἢ διπλασίων. οὐκ ἐστὶ δὲ, ἀλλὰ διπλασίων. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ τοῦ κώνου. διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἔλασσόν ἐστι. δῆλον οὖν ὅτι ἴσον. ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

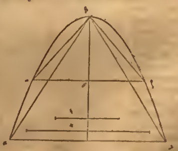
Εἶκα ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέντα τινὶ ἐπιπέδοις, τὸ μὲν ἕτερον ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ δὲ ἕτερον μὴ ὀρθῷ. ἔωντι δὲ οἱ τῶν τμαμάτων ἄξονες ἴσοι, ἴσα ἐσσοῦνται τὰ τμάματα. ἀποτετμάσθω γὰρ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τοῦ μὲν κωνοειδέος ἔστω τομὰ ἁ β γ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ β δ. τῶν δὲ ἐπιπέδων αἱ α ζ, ε γ εὐθεῖαι, τοῦ μὲν ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ ε γ. τοῦ δὲ μὴ ὀρθοῦ ἁ ζ α. ἄξονες δὲ ἔστω τῶν τμαμάτων αἱ β θ, κ λ ἴσαι ἀλλήλαις, κορυφαὶ δὲ τὰ β λ. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ τμᾶμα κωνοειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, τῷ τμάματι τοῦ κωνοειδέος οὗ κορυφὰ τὸ λ. ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, δύο τμάματα ἐντὶ ἀφῃρημένα, τό τε α λ ζ, καὶ τὸ ε β γ. καὶ ἐντὶ αὐτῶν διάμετροι ἴσαι αἱ κ λ, θ β, ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ α λ κ τῷ ε θ β. δέδεικται γὰρ ὅτι τὸ α λ ζ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ε β γ τριγώνῳ. ἄχθω δὴ ἁ α χ κάθετος ἐπὶ τὰν κ λ ἐκβληθεῖσαν.



καὶ ἐπεὶ ἴσαι αἱ β θ, κ λ, ἴσαι καὶ αἱ ε θ, α χ. ἔστω δὲ ἐν τῷ τμάματι οὗ κορυφὰ τὸ β κέ-

νος ἐγγεγραμμένος τοῦ αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἐν δὲ τῷ τμάματι οὗ κορυφὰ τὸ Λ, ἀπότμαμα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ Λ κάθετος ἐπὶ τὰν ΔΖ ἁ ΛΜ, ἐσσεῖται δηλαδὴ ὕψος τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ Λ. τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, καὶ ὁ κῶνος οὗ κορυφὰ τὸ Β τὸν συγκείμενον λόγον ἔχοντι ποτ' ἄλλαλα ἐκ τε τοῦ τῶν βάσεων λόγου, καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων. τὸν συγκείμενον οὖν ἔχοντι λόγον, ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον χωρίον, ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τᾶς περὶ διάμετρον τὰν ΑΖ ποτὶ τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΕΓ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΛΜ ποτὶ ταὺ ΒΘ. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ. ἔχει καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ Λ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ κορυφὰ τὸ Β τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΚΑ ποτὶ ταὺ ΕΘ. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΛΜ, ποτὶ τὰν ΒΘ. ἁ μὲν γὰρ ΚΑ ἡμίσεια ἐστὶ τᾶν διαμέτρων τᾶς βάσιος τᾶς τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ. ἁ δὲ ΕΘ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος τοῦ κώνου. αἱ δὲ ΛΜ, ΒΘ ὕψεα ἐστὶ αὐτῶν. ἔχει δὲ ἁ ΛΜ ποτὶ ταὺ ΒΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ ποτὶ τὰν ΚΛ. ἐπεὶ ἁ ΒΘ ἴσα ἐστὶ τᾷ ΚΛ. ἔχει δὲ καὶ ἁ ΛΜ ποτὶ ταὺ ΚΛ, ὃν ἁ ΧΑ ποτὶ ταὺ ΑΚ ἔχει, καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου ποτὶ τὸν κῶνον τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΑΚ ποτὶ τὰν ΑΧ ἴσα γάρ ἐστιν ἁ ΑΧ τᾷ ΕΘ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΛΜ ποτὶ ταὺ ΒΘ. ὁ δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων λόγος ὁ τᾶς ΑΚ πρὸς ΑΧ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τᾶς ΛΚ πρὸς ΛΜ. τὸ ἄρα ἀπότμαμα πρὸς τὸν κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἁ ΛΚ ποτὶ ταὺ ΛΜ. καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ ΛΜ ποτὶ ταὺ ΒΘ. ἴσα δὲ ἁ ΒΘ τᾷ ΚΛ. δῆλον οὖν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ Λ, τῷ κώνῳ οὗ κορυφὰ τὸ Β. φανερὸν, οὖν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐστὶ ἑτέρῳ αὐτῶν. ἐπεὶ τὸ μὲν ἡμιόλιον ἐστὶ τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἕτερον ἡμιόλιον τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου ἴσου ἐόντος.

κϛ Εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ τμάματα ποτ' ἄλλαλα τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων αὐτοῖς. ἀποτετμάσθω γὰρ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς ἔτυχεν. ἔστω δὲ τῷ μὲν τοῦ ἑτέρου τμάματος ἄξονι ἴσα ἁ Κ, τῷ δὲ τοῦ ἑτέρου ἴσα ἁ Λ. δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἄλλαλα τοῖς ἀπὸ τᾶν Κ, Λ τετραγώνοις. τμαθέντος δὴ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμάματος, ἔστω τομὰ ἁ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἄξων δὲ ἁ ΒΔ. καὶ ἀπολελάφθω ἁ ΒΔ τᾷ Κ ἴσα. καὶ διὰ τοῦ Δ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα. τὸ δὲ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον ταὺ ΑΓ, ἄξονα δὲ ταὺ ΒΔ, ἴσον ἐστὶ τῷ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι ἴσον τᾷ Κ. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ Κ ἴσα ἐστὶ τᾷ Λ, φανερὸν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται ἀλλάλοις. ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν καὶ τῷ αὐτῷ καὶ τὰ τετράγωνα, τὰ ἀπὸ τῶν Κ, Λ ἴσα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ τμάματα τοῖς τετραγώνοις, τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων. εἰ δὲ μὴ ἴσα ἐστὶν ἁ Λ τᾷ Κ, ἔστω ἁ Λ ἴσα τᾷ ΒΘ. καὶ διὰ τοῦ Θ ἐπίπεδον ἄχθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα. τὸ δὲ τμᾶμα τὸ βάσιν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΕΖ, ἄξονα δὲ ταὺ ΒΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ τμάματι τῷ ἔχοντι ἄξονα ἴσον τῷ Λ. ἐγγεγράφθωσαν δύο κῶνοι βάσιν μὲν ἔχοντες τοὺς κύκλους τοὺς περὶ διαμέτρους τὰς ΑΓ, ΕΖ, κορυφὴν δὲ τὸ Β σαμεῖον.

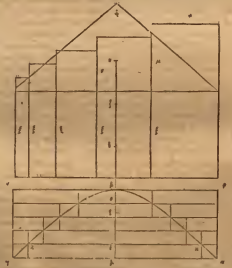


ὁ δὲ κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΒΔ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα ταὺ ΒΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΘΕ δυνάμει. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΘΕ δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει. ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΒΘ, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ΘΒ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ΒΘ. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΒ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΒ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ὁ κῶνος ἄξονα ἔχων τὰν ΒΔ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἄξονα ἔχοντα τὰν ΘΒ, τοῦτον ἔχει τὸν

τὸν λόγον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον τὰν δβ, ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἄξονα ἔχον τὰν θβ. ἑκάτερον γὰρ ἡμιόλιον ἐστί. καὶ ἐστὶ τῷ μὲν τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν βδ, ἴσον τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ κ. τῷ δὲ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν θβ, ἴσον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσαν τᾷ λ. καὶ τᾷ μὲν βδ ἴσα ἁ κ, τᾷ δὲ θβ ἴσα ἁ λ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ κ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ λ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς κ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς λ.

Πᾶν τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ καὶ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. κζ

ἔστω τι τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, ἁ τομὰ ἔστω αὐτοῦ μὲν τοῦ κωνοειδέος ἁ αβγ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα εὐθεῖα ἁ αγ. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ βδ. ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἔστω ἁ βθ. καὶ τᾷ βθ ἴσα ἁ ζθ, καὶ ἁ ζκ. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, λόγον ἔχει ὃν ἁ κδ ποτὶ τὰν ζδ. ἔστω δὴ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ φα, γυ. ἔστω δὲ καὶ κῶνός τις ἐν ᾧ τὸ ψ. καὶ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὰν βδ, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ κδ ποτὶ τὰν δζ. φαμὶ δὴ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον εἶμεν τῷ ψ κώνῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἢ ἔλασσον ἐστίν. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. διάχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ. ἄξονα δὲ τὰν βδ. ἐσσεῖται δὴ ὅλος ὁ κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ ψ κώνου, καὶ μεῖζον ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐστὶ τοῦ ψ κώνου.



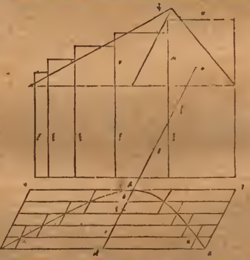
ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς βδ, ἁ βρ. ἐσσεῖται οὖν ἁ κδ τριπλασία τᾶς θρ. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ νδ ποτὶ τὰν θρ. ἔχει δὲ καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος ποτὶ τὸν ψ κῶνον ὃν ἁ ζδ ποτὶ τὰν κδ. ἐξ [illegible] ἀμείβοντι, ὁμοίως τῶν λόγων τεταραγμένων τοῦ αὐτοῦ λόγου ὁ κύλινδρος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὃν ἁ ζδ

ποτὶ

ποτὶ τὰν θ ρ. ἔστω δὲ αἱ γραμμαὶ κείμεναι ἐφ' αὐτὰ ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς ἐν τᾷ β δ εὐθείᾳ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ζ β. καὶ παρ' ἑκάσταν αὐτῶν παραπεπτωκέτω χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ τὸ μὲν μέγιστον ἔστω ἴσον τῷ ὑπὸ ζ δ β. τὸ δὲ ἐλάχιστον ἴσον τῷ ὑπὸ ζ ο β. αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχόντων. καὶ γὰρ αἱ ἴσαι καὶ ταῖς αὐτῇ τᾶς β δ εὐθείας, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχοντι. καὶ ἔστω ἁ μὲν τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρά, ἐφ' ἇς τὸ μ, ἴσα τᾷ β δ. ἁ δὲ τοῦ ἐλαχίστου ἴσα τᾷ β ο. ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ἐν οἷς τὸ ω, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, τῷ ὑπὸ ταῖν ζ δ β. ὁ δὲ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον ταὶν α γ, ἄξονα δὲ ταὶν δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον ταὶν κ λ, ἄξονα δὲ ταὶν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ δ α ποτὶ ταὶν κ ε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταὶν ζ δ β, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῖν ζ ε, β ε. ἐν πάσᾳ γὰρ τᾷ τῶν ἀμβλυγωνίων κώνων τομᾷ τοῦτο συμβαίνει. ἁ γὰρ διπλασία τᾶς ποτε οὔσας, τουτέστι τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου, πλαγία ἐστὶ τοῦ εἴδους πλευρά. καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ὑπὸ ταῖν ζ δ, β δ περιεχομένῳ ἴσον τὸ ξ μ χωρίον, τῷ δὲ ὑπὸ ταῖν ζ ε, β ε ἴσον ἐστὶ τὸ ξ ν. ἁ γὰρ ξ ἴσα ἐστὶ τᾷ ζ β, ἁ δὲ ν τᾷ β ε, ἁ δὲ μ τᾷ β δ. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον ταὶν α γ, ἄξονα δὲ ταὶν δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, ἄξονα δὲ τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξ μ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἄξονα τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τὰν περὶ τὰν ν ξ παραπεπτωκόταν ὑπερβάλλον τῷ τετραγώνῳ. ἐστὶ δή τινα μεγέθεα οἱ κύλινδροι, οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἕκαστος ἄξονα ἔχει ἴσον τᾷ δ ε, καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία ἐν οἷς τὸ ω, ἴσα τούτοις τῷ πλήθει, κατὰ δύο μεγέθεα τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. ἐπεὶ οἵ τε κύλινδροι ἴσοι ἐντὶ ἀλλάλοις, καὶ τὰ ω χωρία ἴσα ἀλλάλοις. λέγονται δὲ τῶνδε κυλίνδρων τινὲς ποτὶ ἄλλους κυλίνδρους ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. καὶ τῶν χωρίων ἐν οἷς τὰ ω ποτ' ἄλλα χωρία τὰ παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, τὰ δὲ ὁμόλογα ἐν τοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου. δεικτέον δέ, ὅτι πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζω λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ ν ξ ποτὶ ταὶν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμίσεια τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα ἔχει λόγον, ἢ ὃν ἁ ζ δ ποτὶ ταὶν θ ρ, ὃν ὅλος κύλινδρος ἔχων ἐδείχθη ποτὶ τὸν ψ κῶνον. μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ ψ κῶνος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον τοῦ ψ κώνου, οὐκ ἄρα μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐδὲ μὴν ἔλασσον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν οὖν ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τμάματος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὲ ὅτι κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα ταὶν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα ταὶν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξ ν. ἴσον γὰρ ἑκάτερον. καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, καὶ ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ ταὶν ξ παραβλημάτων σὺν τῷ ὑπερβλήματι, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν περιγεγραμμένων χωρὶς τοῦ μεγίστου, ἴσον εἶναι ἑκάστῳ τῶν ἐγγεγραμμένων σὺν τῷ μεγίστῳ. ἕξει οὖν καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ τὰ παραβλήματα σὺν τοῖς ὑπερβλήμασι. δέδεικται δὲ πάλιν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ ἐν παρὰ ἐλάσσω λόγον ἔχοντα τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξ ν ποτὶ ταὶν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾷ τε ἡμίσεια τᾶς ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ ζ δ ποτὶ ταὶν θ ρ. ἀλλ' ὡς ἁ ζ δ ποτὶ ταὶν θ ρ, ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον.

κώνου. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ψ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον οὔτε ἔλασσόν ἐστι, δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

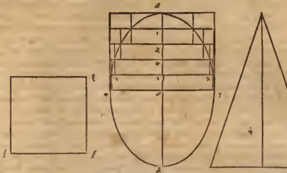
Καὶ τοίνυν ἄν κα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα τοῦ ἀμβλυγωνίου κε κωνοειδέος, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῷ τε ἄξονι καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. ἔστω γὰρ τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ ἐπιπέδῳ τοῦ σχήματος ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ τμᾶμα, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ βγ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακότος τὸ τμᾶμα, ἁ γα εὐθεῖα. κορυφὰ δὲ ἔστω τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, τὸ θ σαμεῖον. καὶ ἄχθω διὰ τοῦ β παρὰ τὰν αγ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ φυ. ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ β. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, τέμνει δὴ αὐτὰ δίχα τὰν αγ. καὶ ἐσσεῖται κορυφὰ μὲν τοῦ τμάματος τὸ β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ βδ, ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἁ βθ. τᾷ δὲ βθ ἴσα ἔστω ἑκατέρα τᾶν βζ, ζε. ἀπὸ δὲ τᾶς φυ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω τι παράλληλον τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπιψαύσει δὴ τοῦ κωνοειδέος κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν αγ οὐκ ἐὸν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα τέτμακε τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ γα. ἐούσας δὲ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν αγ, καὶ τᾶς δ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακούσας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰν ἀπὸ τᾶς διαμέτρου, ὀρθὰν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν, τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ βδ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος οὖν ἐσσεῖται τις κυλίνδρου τόμος, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἁ δὲ ἑτέρα βάσις αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν φυ. πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι, κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος οὖν, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, δεικτέον ὅτι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἀρμένον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ εδ ποτὶ τὰν δζ. ὃν γὰρ οὖν ἔχει λόγον ποτὶ τὰν δζ, τοῦτον ἐχέτω ὁ ψ κῶνος ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου. εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ κώνου τοῦ ψ, εἰ γὰρ μὴ δυνατόν, ἐστὶ μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομέων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ τμάματος, ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ ψ κώνου, δῆλον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ.

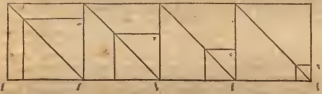


τοῦ τοῦ κώνου. ἀνάχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν τόμων τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν τῷ σχήματι πάντων ἐσσεῖται ποτὶ ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. καὶ ἔστι β ε τρίτον μέρος ἴσω τᾶς β δ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρᾶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ᾽ ἀλλήλους, ὃν περ αἱ βάσεις αὐτῶν. ἐπεὶ ὁμοῖαι ἐντὶ ὀξυγωνίου κώνου τομαί. τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχοντι ποτ᾽ ἀλλάλους, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτᾶν δυνάμει. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε, τοῦτον ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ β περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε β. ἐπειδήπερ αἱ μὲν ζ δ ἀγμέναι διὰ τοῦ θ, καθ᾽ ἃς ἔγγιστα συμπίπτοντι. αἱ δὲ α δ, κ ε παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ἔστι δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν ζ δ β περιεχόμενον ἴσον τῷ ω χωρίῳ. τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ζ ε β τῷ ξ μ. ἔχει οὖν ὁ πρᾶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε ποτὶ τὸν πρᾶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξ μ. καὶ τῶν ἄλλων δὲ τόμων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δ ε ποτὶ τὸν τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ᾽ αὐτὸν ἐόντα, καὶ ἄξονα ἔχοντα ἴσαν τᾷ δ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλόντων εἴδει τετραγώνῳ. Πάλιν οὖν ἐντί τινα μεγέθεα οἱ ἐν τῷ ὅλῳ τόμοι, καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία ἐν οἷς τὸ ω ἴσα τῷ πλήθει τοῖς τόμοις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι αὐτοῖς. λέγονται δὲ οἱ τόμοι, ποτ᾽ ἄλλως τόμως τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος τόμος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. τὰ δὲ ω χωρία ποτ᾽ ἄλλα χωρία παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότα τὰ ὑπερβάλλοντα εἴδεσι τετραγώνοις, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τόμοι ποτὶ πάντας τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα, χωρὶς τοῦ μεγίστου. πάντα δὲ τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα, χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ γ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἁμισείᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὅλος ὁ τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἁμισείᾳ τᾶς ξ, καὶ τοῦ τρίτου μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ζ δ ποτὶ τὴν θ ε. μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν τοῦ κώνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τοῦ κώνου. οὐκ ἔστιν οὖν μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ τοῦ κώνου. εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ τοῦ κώνου, ἐγγραφθείσης εἰς τὸ τμῆμα σχήματος στερεοῦ, καὶ ἄλλου περιγραφέντος ἐκ κυλίνδρων τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ τοῦ κῶνος τοῦ τμάματος. πάλιν ὁμοίως δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ τοῦ κώνου. καὶ ὁ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ποτὶ τὸν τοῦ κῶνον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἔστιν οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ τοῦ κώνου. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

κθ Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος, ἐπιπέδῳ τμηθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ τετμημένον διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ, τοῦ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς, καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ β δ, κέντρον δὲ τὸ θ. διοίσει δὲ οὐδὲν εἴτε ἁ μείζων ἐστὶ διάμετρος ἁ β δ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, εἴτε ἐλάσσων. τοῦ δὲ τετμηκότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα τομὰ ἔστω ἁ γ α εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ θ, καὶ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν β δ. ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπόκειται διὰ τοῦ κέντρου τετάχθαι, καὶ ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα, δεικτέον ὅτι τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ β σαμεῖον, διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω γὰρ κῶνος τις ἐν ᾧ τὸ τοῦ διπλάσιον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν τὰν τοῦ τμάματι. καὶ ἄξονα τὸν αὐτὰν τὰν θ β. φαμὶ δὲ τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἴσον εἶμεν τῷ τοῦ κώνῳ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τῷ τοῦ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω, ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερ-

ὑπερέχει τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἁμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ κώνου. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἐν τῷ τμάματι τοῦ ἁμίσεος τοῦ σφαιροειδέος μεῖζόν ἐστι τοῦ κώνου. ἔστω δὴ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ





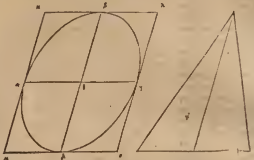
τὰν β δ. ἐπεὶ οὖν οὗτος ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὁ δὲ τοῦ κῶνος διπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου, δῆλον ὡς ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ κώνου. ἐκβεβλήσθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν κυλίνδρων πάντων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἐς τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. ἔστω δὴ οὖν γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ' αἷς τὰ ξ, τῷ πλήθει ἴσαι τοῖς τμάμασι τᾶς β δ εὐθείας, τῷ δὲ μεγέθει ἴσα ἑκάστα τᾷ β θ, καὶ ἀπὸ ἑκάστας τετράγωνον ἀναγεγράφθω. ἀφαιρείσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ ἐσχάτου τετραγώνου γνώμων, πλάτος ἔχων ἴσαν τᾷ β ι. ἐσσεῖται δὲ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν β ι, ι δ. ἀπὸ δὲ τοῦ παρ' αὐτῷ τετραγώνου γνώμων ἀφαιρείσθω, πλάτος ἔχων διπλάσιον τᾶς β ι. ἐσσεῖται δὴ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν β χ, χ δ. καὶ ἀεὶ ἀπὸ τοῦ ἐχομένου τετραγώνου γνώμων ἀφαιρείσθω πλάτος μὲν ἴσον τμάματι, μεῖζον τοῦ πλάτεος τοῦ πρότερον αὐτοῦ ἀφαιρημένου γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ ἕκαστος αὐτῶν ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τᾶς β δ τμαμάτων, ὧν τὸ ἕτερον τμᾶμα ἴσον ἐστὶ τῷ πλάτει τοῦ γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ καὶ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου τὸ λοιπὸν τετράγωνον, τὰν πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ θ ε. ὁ δὲ κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν πρῶτον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α θ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. ὥστε καὶ ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ περιεχόμενον. ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ἀφαιρημένον. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος, ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν

τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, καὶ ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ τετράγωνον, ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ τετραγώνου ἀφαιρεθέντα. ἐντὶ δή τινα μεγέθεα οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ξ ξ ἴσα τῷ πλήθει τοῖς κυλίνδροις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα. λέγονται δὲ οἱ κύλινδροι ποτ' ἄλλα μεγέθεα τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ πρὸς οὐδὲν λέγεται. καὶ τὰ τετράγωνα ποτ' ἄλλα μεγέθεα τοὺς ἀπὸ τῶν τετραγώνων ἀφαιρεθέντας ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον τετράγωνον οὐδὲ πρὸς οὐδὲν λέγεται. πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους κυλίνδρους, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρεθέντας ἀπ' αὐτῶν. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρεθέντας ἀπ' αὐτῶν. τὰ δὲ τετράγωνα πάντων τῶν γνωμόνων τῶν ἀφαιρεθέντων ἀπ' αὐτῶν μείζονα ἐντὶ ἢ ἡμιόλια. ἐντὶ γὰρ τινὲς γραμμαὶ κείμεναι αἱ ξ ε, ξ ς, ξ τ, ξ υ, ξ φ, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαί, ἐφ' ἂν τὰ δύο ξ ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. τὰ νῦν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν ἃ δεῖ ἕκαστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, πάντων μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἴσων ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐντὶ ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, μείζονα ἢ τριπλάσιον. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς περὶ τῶν ἑλίκων ἐκδεδομένοις δέδεικται. ἐπεὶ δὲ πάντα τὰ τετράγωνα ἐλάσσονα ἐντὶ, ἢ τριπλάσια τῶν ἑτέρων τετραγώνων, ἅ ἐντι ἀφαιρεθέντα ἀπ' αὐτῶν, δῆλον ὅτι τῶν λοιπῶν μείζονα ἐντὶ ἢ ἡμιόλια. τῶν οὖν γνωμόνων μείζονα ἢ ἡμιόλια, ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. τοῦ γὰρ ψ κώνου ἡμιόλιός ἐστι. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐδόχθη τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν β ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν β ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτ' αὐτό. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ε π, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ε π, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ β τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθέντα, καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος, τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ β ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει λόγον, ὁμοίως τεταγμένου αὐτοῦ τετραγώνου ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθέντα. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ τὸ ἴσον τῷ πρώτῳ τετραγώνῳ, καὶ τοῖς γνώμοσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τετραγώνων ἀφαιρεθεῖσι. καὶ τὰ τετράγωνα πάντα ἐλάσσονα ἐντὶ, ἢ ἡμιόλια τοῦ ἴσου τῷ τε πρώτῳ τετραγώνῳ, καὶ τοῖς γνώμοσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρεθεῖσι, διότι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονά ἐντι ἢ τριπλάσια. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. τοῦ γὰρ ψ κώνου ἡμιόλιός ἐστι. τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐδείχθη τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὔτε μεῖζόν ἐστιν, οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστί.

λ Καὶ τοίνυν ἐὰν τὸ σφαιροειδὲς μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου τμαθῇ, ὁμοίως τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος, διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. τετμάσθω γὰρ σχῆμα σφαιροειδές. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά, κέντρον δὲ αὐτᾶς τὸ θ, τοῦ δὲ τετμακότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἔστω ἁ α γ εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ θ ἀγομένα, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπόκειται διὰ τοῦ κέντρου ἄχθαι. ἐσσεῖται οὖν τις ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ

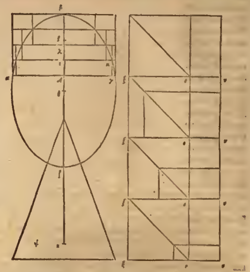
ἀποτέμνον

ἀποτέμνον ἐπικείσθω ποτ' ὀρθὰς ἄμα τῷ ἄξονι ἀγμένον. ἄχθω δή τινες αἱ κλ, μν παρὰ τὰν αγ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, δ. ἀπὸ δὲ τᾶν κλ, μν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω παράλληλα τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπιψαύοντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ β, δ ἐπιζευχθεῖσαι. ἐσσεῖται δὲ διὰ τοῦ θ, καὶ ἐσσοῦνται τῶν τμαμάτων κορυφαὶ μὲν τὰ β, δ σαμεῖα, ἄξονες δὲ αἱ βθ, θδ. δυνατὸν δέ ἐστιν εὑρεῖν κύλινδρον, ἄξονα ἔχοντα τὰν βθ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος δὲ ἐσσεῖται τις κυλίνδρου τόμος, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι, κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος δὲ ἐσσεῖται τὸ ἀπότμαμα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. λέγω δή, ὅτι τοῦ σφαιροειδέος ἡμίσεον διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. ἔστω δὴ ὁ ψ κῶνος διπλάσιος τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δή τι ἐς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος, μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν ψ κώνου καὶ ὁ τόμος ἐών, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος μείζων ἢ ἡμιόλιος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἔσται οὖν τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐγγεγράφθω κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. πάλιν οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν ψ κώνου ἡμιόλιος ἐών, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζόν ἐστιν, οὐδὲ ἔλασσον, ἴσον ἐστί. φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.



Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ λα
ἔλαττον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τὰ ἡμίσεα τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ὁ ἄξων τοῦ μείζονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. ἔστω γάρ τι τμᾶμα σφαιροειδέος σχήματος, ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς, καὶ ἄξων σφαιροειδέος ἔστω ἁ βζ, κέντρον δὲ τὸ θ. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα, τομὰ ἔστω ἁ αγ εὐθεῖα. ποιεῖσθαι δὲ αὐτὰ ὀρθὰς γωνίας ποτὶ τὰν βζ. ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἦν ποτὶ τὸν ἄξονα ὑπόκειται. ἔστω δὲ τὸ τμᾶμα τὸ ἀποτετμημένον, οὗ κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ἔλασσον ἢ ἁμίσεος τοῦ σφαιροειδέος σχήματος, καὶ τᾷ βθ ἴσα ἔστω ἁ ζη. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα οὗ κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ δη ποτὶ τὰν δζ. ἔστω δὲ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἐλάσσονι τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω δὲ καὶ κῶνος, ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτάν, τοῦτον ἔχων τὸν λόγον ὃν ἔχει ἁ

δκ ποτὶ τὰν δζ. φαμὶ δὴ τὸν τοῦ κῶνον ἴσον εἶμεν τῷ τμάματι τῷ κορυφὰν ἔχοντι τὸ β σαμεῖον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστι τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, ἔλασσον ὑπερέχει τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου. δῆλον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ κώνου. ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς βδ ἁ βρ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν βκ διπλασία ἐστὶ τᾶς βθ, καὶ ἁ βδ τᾶς βρ, τριπλασία ἐστὶ καὶ ἁ δκ τᾶς θρ. ἔχει δὴ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν βδ, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτάν,



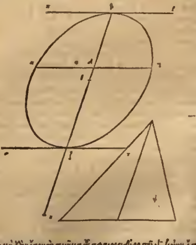
καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δκ ποτὶ τὰν θρ. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἀρημένος ποτὶ τὸν τοῦ κῶνον, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ δζ ποτὶ τὰν δκ. ἐξ ἴσου οὖν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων ὁ κύλινδρος, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ποτὶ τὸν τοῦ κῶνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ. ἔστω δὴ γραμμαὶ κείμεναι ἐφ' αὐτᾶ ξν, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς ἐν τᾷ βδ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ζδ. ἔστω δὲ καὶ τῶν ξο ἑκάστα ἴσα τᾷ βδ. τᾶν οὖν νο ἑκάστα διπλασία ἐσσεῖται τᾶς θδ. παραπεπτωκέτω δὴ παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον τι, πλάτος ἔχον ἴσον τᾷ βδ. ὥστε εἶμεν ἕκαστον τῶν ἐχόντων τὰς διαμέτρους τετράγωνον, ἀφαιρεέσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου γνώμων πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ βε. ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου, πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ βχ. καὶ ἀφ' ἑκάστου τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς ἀπὸ τοῦ ἑπομένου χωρίου γνώμων ἀφαιρεέσθω, πλάτος ἔχων ἐν τμάματι ἔλασσον τοῦ πλάτεος τοῦ πρὸ αὐτοῦ γνώμονος ἀφαιρημένου. ἐσσεῖται δὴ ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος, ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν βε, εζ, καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παραπεπτωκὸς παρὰ τὰν νο, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ δε. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος, ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζχ, χβ. καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παρὰ τὰν νο παραπεπτωκός, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως τούτοις. ἐξοῦντι δὲ ὧδε. τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τό, τε ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους, τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν, ὁ δὴ πρῶτος ὁ κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς δγ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κε. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν βδ, δζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν βε, εζ. ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ἕκαστος ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κατ' αὐτὸν

κύλινδρον

κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν, ὥσπερ ἕξει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ἐντὶ οὖν μεγέθεα τινὰ οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα χωρία παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, πλάτος ἔχοντα τὰν ἴσαν τᾷ βδ, τῷ δὲ πλήθει ἴσα τοῖς κυλίνδροις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. λέγονται δὲ οἵ τε κύλινδροι ποτ' ἄλλως κυλίνδρως τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. καὶ τὰ χωρία ποτ' ἄλλα χωρία τοὺς ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρημένως, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον χωρίον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. δῆλον οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. καὶ ἐπεὶ ἐντί τινες γραμμαὶ ἴσαι κείμεναι ἐφ' αὐτᾷ νο, καὶ παρ' ἑκάσταν παραπέπτωκέ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα ἐστὶ τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλα ἐντὶ χωρία παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, πλάτος ἔχοντα ἴσας τᾷ βδ, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, δῆλον ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ὧν ἐστὶν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέρᾳ τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς νο, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ξο. φανερὸν οὖν ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας μείζονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν, συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς νο, καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ξο. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς νο, καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ξο. ἐστὶ δὲ τᾷ μὲν ξν ἴσα ἁ δζ. τᾷ δὲ ἡμισείᾳ τᾶς νο, ἁ δε, τᾷ δὲ τρίτᾳ δύο μόρια τᾶς ξο, ἁ δρ. ὅλος ἄρα ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ἔχει ἁ δζ ποτὶ τὰν βρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δζ ποτὶ τὰν βρ, ὥσπερ ὑπέχθη ἔχων ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον. μείζονα οὖν ἕξει λόγον ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἀλλ' ἔστω εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω τι εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστιν ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσον ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγραφὲν, ἢ ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρᾶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρᾶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὥσπερ ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἔσχατον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότων, πλάτος ἐχόντων ἴσον τᾷ βε, ποτ' αὐτό. ἑκάτερα γὰρ ἴσα ἐστίν. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν κατ' αὐτὸν ἐόντα τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ πρᾶτον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ξν πεπτωκότων, πλάτος ἐχόντων ἴσαν τᾷ βδ, ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀφαιρημένον ἀπ' αὐτοῦ. καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κατ' αὐτὸν κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμόλογον χωρίον αὐτῷ τῶν παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότων, ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον πλὴν τοῦ λεγομένου τοῦ ἐσχάτου. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία τὰ παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, ποτὶ τὸ ἴσον τῷ τε ἐσχάτῳ κειμένῳ χωρίῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀφαιρημένοις ἀπὸ τῶν ἄλλων, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι τὰ χωρία πάντα τὰ παρὰ τὰν νο παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, χωρὶς τοῦ μεγίστου, μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς νο, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ξο. δῆλον ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ τὰ λοιπά, ἅ ἐντι ἴσα τῷ ἐσχάτῳ χωρίῳ κειμένῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρημένοις, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις ταῖς τε ἡμισείαις τᾶς νο, καὶ δυσὶ τριταμορίοις τᾶς ξο. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμ-

μένον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ ζ δ ποτὶ τὰν θ ε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δ ζ ποτὶ τὰν θ ε, τοῦτον ἔχει ὁ εἰρημένος κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τοῦ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον, οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστίν.

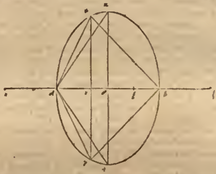
κβ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς, μὴ δὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ ἔλασσον αὐτοῦ τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν αἱ συναμφότεραι, τᾶ τε ἡμίσεια τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. τετμάσθω γάρ τι σχῆμα σφαιροειδὲς, ὡς εἴρηται. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ γ α εὐθεῖα. καὶ παρὰ ταὶ α γ ἄχθω αἱ π ε, ε τ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, ζ. καὶ ἀνεστακέτω ἀπ᾽ αὐτᾶν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν α γ. ἐπιψαυσοῦντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ β, ζ. καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων ἐπιζευχθεῖσαι. καὶ ἴσω ἁ β ζ. πισεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστω κέντρον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τᾶς τε ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται μὴ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα τετμᾶσθαι τῷ ἐπιπέδῳ τὸ σχῆμα, ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἇς διάμετρος αὐτᾶς ἁ γ α. λελάφθω οὖν ὅτι κύλινδρος ἄξονα ἔχων ἐπ᾽ εὐθείας τᾶ β δ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἁ περὶ διάμετρον τὰν α γ. καὶ ὁ κῶνος ὁ κορυφὰν ἔχων τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἐσσεῖται δὴ τόμος τις κυλίνδρου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, καὶ ἀπότμημα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ δ κ ποτὶ τὰν δ ζ. ἴσα δὲ ἔστω ἁ ζ κ τᾷ θ ζ. λελάφθω δή τις κῶνος, ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δ κ ποτὶ τὰν δ ζ. εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατὸν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὲ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅ ἐστιν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου μεῖζον. ἀλλ᾽ ἔστω εἰ δυνατὸν ἔλασσον. ἐγγεγράφθω δὴ πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ἐκ κυλίνδρου τομῶν ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος. πάλιν δὲ διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα λόγον ἔχων, ἢ ποτὶ



ἁ ποτὶ τὸν τοῦ κώνου, ὃ δεῖν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου. φανερὸν οὖν ὡς ἔδει δεῖξαι.

Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονι, ποτὶ τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονα. κδ

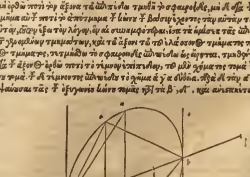
τετμάσθω τι σφαιροειδὲς ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν τμάματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σχήματος ἁ β δ. τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἁ γ α εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ β δ. ἔστω δὲ μεῖζον τῶν τμαμάτων οὗ κορυφὰ τὸ β. καὶ κέντρον τοῦ σφαιροειδέος τὸ θ. ποτικείσθω δὴ ἁ δ η τᾷ δ θ ἴσα, καὶ α β ζ τᾷ αὐτᾷ ἴσα. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τετμάσθω δὴ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἔστω κορυφὰν ἔχων τὸ δ σαμεῖον. ἐστὶ δὴ τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς διπλάσιον τοῦ τμάματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον. τὸ δὲ εἰρημένον τμᾶμα διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δέδεικται γὰρ ταῦτα. τὸ ὅλον οὖν σφαιροειδὲς τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ εἰρημένου. ὁ δὴ κῶνος οὗτος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ δ ποτὶ τὰν ε δ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε α. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε α, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ β θ, θ δ ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῶν β ε, ε δ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ θ δ ποτὶ τὰν ε δ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ξ δ ποτὶ τὰν θ δ. ἕξει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῶν ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῶν β θ, θ δ, ὃν ἁ δ θ ποτὶ τὰν δ ε. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ξ δ, θ β, ποτὶ τὸ ὑπὸ β θ δ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ταῶν β θ, θ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῶν β ε, ε δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῶν β ε, ε δ. ἕξει οὖν ὁ μὲν κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον ταῶν κ λ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῶν β ε, ε δ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν αὐτῷ, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ζ ε, ε δ. τουτέστιν ἁ β ε ποτὶ ε ζ. τὸ γὰρ ἔλασσον ἢ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισέᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος. οὗτος δέ ἐστιν ὃν ἔχει ἁ ζ ε ποτὶ τὰν β ε. ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος, ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ἥμισυ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῶν ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῶν ζ ε, δ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν ἐν τῷ ἡμίσει τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῶν β θ, ξ δ. τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος πο-



τὶ

τὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἔλασσον, ἢ τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἔχει καὶ τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἔλασσον αὐτοῦ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ὥστε καὶ τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχὰ, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ πρὸς τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ὑπερέχει δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, τοῦ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ, τῷ τε ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε η περιεχομένῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ξ ε. ἔχει ἄρα τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος πρὸς τὸ ἔλασσον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε η, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ξ ε, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν αὐτῷ, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ α ζ ε ποτὶ τὰν β ε. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμάματι ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ μείζονι τμάματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον. τὸν γὰρ τῶν ὑψέων λόγον ἔχοντι οἱ κῶνοι, ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν, ἔχει οὖν καὶ τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον ὅνπερ τὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε η, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ξ ε, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β ε. τοῦτο δὲ αὐτό ἐστι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε η, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε δ, ὅνπερ ἔχει λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ξ ε περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, θ ε, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον (ε δ) ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. ἁ γὰρ ξ ε ποτὶ τὰν θ ε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ, διὰ τὸ ἀνάλογον εἶμεν τὰς ξ δ, θ δ, η ε. καὶ τὰν θ δ ἴσαν τε εἶμεν τᾷ η δ. καὶ τὸ ἴσον οὖν ἀμφοτέροις τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε η, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ξ ε, ποτὶ τὸ ἴσον συναμφοτέροις, τῷ τε ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε δ, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζ ε, θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ε β τετράγωνον, ἴσον ἐστὶν ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε δ. καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζ ε, θ ε. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τᾶς β θ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε δ περιεχομένῳ. ἁ δὲ ὑπεροχὰ ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς β θ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζ ε, θ ε. ἐπεὶ ἴσαι ἁ β θ, β ζ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ μεῖζον τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ.

λδ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς, μὴ δὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμᾶμα αὐτοῦ ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὅνπερ ἕξει τὸν λόγον, ὃν αἱ συναμφότεραι, ἴσαι τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γινομένων τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, τετμάσθω τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ ὡς εἴρηται. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ, ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ γ α εὐθεῖα. παρὰ δὲ τὰν α γ ἄχθωσαν αἱ π ρ, ς τ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, δ. καὶ ἀνεστάκετω ἀπ' αὐτᾶν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν α γ. ἐπιψαύοντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ β, δ, καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων τὰ β, δ. ἄχθω οὖν ἁ τὰς κορυφὰς ἐπιζευγνύουσα τῶν γινομένων τμαμάτων ἁ β δ. πεσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου,



καὶ ἔστω κέντρον τὸ θ. μεῖζον ὄντος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα, οὗ κορυφὰ τὸ β. ποτικείσθω δὲ ἁ δ η ἴσα τᾷ δ θ, καὶ ἁ β ζ τᾷ αὐτᾷ. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, τὸ μεῖζον ποτὶ τὸ ἀπότμαμα

πότμαμα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου παράλληλα τῷ κατὰ τὰν α γ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἀπότμαμα κώνου, κορυφὰν ἔχον τὸ δ σαμεῖον. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ δ θ ποτὶ τὰν ε δ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ξ δ ποτὶ τὰν θ δ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι ἐγγεγραμμένου, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμάματι ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἐν ᾧ ἐγγέγραπται, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἐξ ἴσου τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἕξει οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, ξ δ. τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον ἑκατέρου. τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἕξει οὖν τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα αὐτοῦ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. αὐτὸ δὲ τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. δέδεικται γὰρ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ ζ ε ποτὶ τὰν β ε. τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμάματι ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ μείζονι τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον. τὰ γὰρ ἀποτμάματα τῶν κώνων τὰ εἰρημένα τούτων ὑψέων λόγον ἔχοντι (τὰν αὐτὰν) τὰ δὲ ὕψεα αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τὸν τῆς δ ε πρὸς τὸν ε β. ἔχει καὶ τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχά, ἃ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, τοῦ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον. ὁ δὲ λόγος οὗτος, ὁμοίως τῷ πρότερον δειχθέντι, ὁ αὐτός ἐστιν τῷ, ὃν ἔχει ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΧΑΙΡΕΙΝ.

Τῶν ποτὶ Κόνωνα ἀποσταλέντων θεωρημάτων, ὑπὲρ ὧν αἰεὶ τὰς ἀποδείξιας ἐπιστέλλεις μοι γράψαι, τῶν μὲν πλείστων ἐν τοῖς ὑπὸ Ἡρακλείδα κομισθέντεσσιν ἔχεις γεγραμμένας, τινὰς δὲ αὐτῶν καὶ ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας, ἐπιστέλλω τοι. μὴ θαυμάσῃς δέ, εἰ πλείονα χρόνον ποιήσαντες ἐκδίδομεν τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν. συμβαίνει γὰρ τοῦτο γεγενῆσθαι, διὰ τὸ βούλεσθαί με πρότερον διδόμεν τοῖς περὶ τὰ μαθήματα πραγματευομένοις, καὶ ματεύειν αὐτὰ προαιρουμένοις. ποῖα γὰρ τῶν ἐν γεωμετρίᾳ θεωρημάτων οὐκ εὐμέθοδα ἐν ἀρχᾷ φανέντα χρόνῳ τὰν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι, Κόνων μὲν οὐχ ἱκανὸν λαβὼν ἐς τὰν ματεύσιν αὐτῶν χρόνον μετάλλαξεν τὸν βίον, καὶ ἄδηλα ἐποίησεν. καὶ ταῦτα πάντα εὑρών, καὶ ἄλλα πολλὰ ἐξευρών, καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖον προάγαγε γεωμετρίαν. ἐπιστάμεθα γὰρ ὑπάρξασαν αὐτῷ σύνεσιν οὐ τὰν τυχοῦσαν περὶ τὸ μάθημα, καὶ φιλοπονίαν ὑπερβάλλουσαν, μετὰ δὲ τὰν Κόνωνος τελευτὰν πολλῶν ἐτέων ἐπιγεγενημένων, οὐδ᾽ ὑφ᾽ ἑνὸς οὐδὲν τῶν προβλημάτων αἰσθανόμεθα κεκινημένον. βούλομαι δὲ καθ᾽ ἓν ἕκαστον αὐτῶν προενεγκεῖσθαι. καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ μὲν κεχωρισμένων, τέλους δὲ ποτιδεομένων, ὅπερ οἱ φάμενοι μὲν πάντα εὑρίσκειν, ἀπόδειξιν δὲ αὐτῶν οὐδὲ μίαν ἐκφέροντες ἐλέγχονται, ἀπὸ δ᾽ ὁμολογηκότες εὑρίσκειν τὰ ἀδύνατα. ταῦτα δὴ ποῖα τῶν προβλημάτων ἐντί, καὶ τίνων τὰς ἀποδείξιας ἔχεις ἀπεσταλμένας, καὶ ποίων ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ κομίζοντες δοκιμάζοντες ἐμφανίσαι τοι. πρῶτον δὴ τῶν προβλημάτων ἦν, σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας, ὃ δὴ καὶ πρᾶτον ἐγένετο φανερόν, ἐκδοθέντος τοῦ περὶ τᾶς

σφαίρας βιβλίῳ. δειχθέντος γὰρ ὅτι πάσας σφαίρας ἁ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, δῆλον ὡς δυνατόν ἐστι χωρίον ἐπίπεδον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας. δεύτερον δὲ, κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου, σφαίραν εὑρεῖν ἴσαν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ. τρίτον δὲ, τὰν δοθεῖσαν σφαίραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτᾶς ποτ' ἄλλαλα τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. τέταρτον δὲ, τὰν δοθεῖσαν σφαίραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τᾶς ἐπιφανείας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν ποτ' ἄλλαλα. πέμπτον δὲ, τὸ δοθὲν τμᾶμα σφαίρας, τῷ δοθέντι τμάματι σφαίρας ὁμοιῶσαι. ἕκτον δὲ, δύο δοθέντων τμαμάτων σφαίρας, εἴτε τᾶς αὐτᾶς, εἴτε ἄλλας, εὑρεῖν τι τμᾶμα σφαίρας, ὃ ἐσσεῖται αὐτὸ μὲν ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ τῶν τμαμάτων, τὰν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσαν ἕξει τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου τμάματος. ἕβδομον, ἀπὸ τᾶς δοθείσας σφαίρας τμᾶμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον, τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν μὴ μείζονα τοῦ ὃν ἔχει τὰ τρία ποτὶ τὰ β. τούτων μὲν τῶν εἰρημένων πάντων τὰς ἀποδείξιας, Ἡρακλείδας ἐκόμισεν. τὸ δὲ μετὰ ταῦτα κεχωρισμένον ψεῦδος ἦν. ἐστὶ δὲ, εἴ κα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον διπλασίονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ μείζων ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, διὰ τῶν προαπεσταλμένων φανερόν ἐστι. κεχώρισται γὰρ ἐν αὐτοῖς τόδε. εἴ κα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα πρὸς ὀρθὰς διαμέτρῳ τινὶ τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ τμᾶμα τὸ μεῖζον τᾶς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἔλασσον. τὸ γὰρ μεῖζον τμᾶμα τᾶς σφαίρας ποτὶ τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ μείζων ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐλάσσονα. μείζονα δὲ, ἢ ἡμιόλιον. ἦν δὲ καὶ τὸ ἔσχατον κεχωρισμένον τῶν προβλημάτων ψεῦδος, ὅτι εἴ κα σφαίρας τινὸς ἡ διάμετρος τμαθῇ, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμάματος τετράγωνον τριπλάσιον εἶμεν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, καὶ διὰ τοῦ σημείου τὸ ἐπίπεδον ἀχθὲν ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τέμνῃ τὴν σφαῖραν, τὸ τοιοῦτον τῷ εἴδει σχῆμα, οἷον ἐστὶ τὸ μεῖζον τᾶς σφαίρας τμᾶμα, μέγιστόν ἐστι τῶν ἄλλων τμαμάτων τῶν ἐχόντων ἴσαν τὰν ἐπιφάνειαν. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, δῆλον, διὰ τῶν προαπεσταλμένων θεωρημάτων. δέδεικται γὰρ, ὅτι τὸ ἡμισφαίριον μέγιστόν ἐστι τῶν περιεχομένων ὑπὸ ἴσας ἐπιφανείας σφαίρας τμαμάτων. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τοῦ κώνου προβεβλημένα ἐστὶ τάδε. εἴ κα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθῇ, ὥστε εἶμεν ἄξονα τὰν διάμετρον, τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κωνοειδὲς καλείσθω. καὶ εἴ κα τοῦ κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμνῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφὰ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. εἰ δὲ καὶ τὸ εἰρημένον σχῆμα, ἐπιπέδῳ τμαθῇ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὅτι μὲν ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, δῆλον. ὅτι δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, δεῖξαι δεῖ. καὶ εἴ κα τοῦ κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις ὁποσουοῦν ἀγμένοις. ὅτι μὲν οὖν αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ, δῆλον, εἴ κα τὰ ἀποτέμνοντα ἐπίπεδα μὴ ὀρθὰ ἔωντι ποτὶ τὸν ἄξονα. ὅτι δὲ τὰ τμάματα ποτ' ἄλλαλα ἑξοῦντι τὸν λόγον, ὃν ἔχοντι δυνάμει ποτ' ἀλλάλας, αἱ ἀπὸ τᾶν κορυφᾶν αὐτῶν ἀγμέναι παρὰ τὸν ἄξονα μέχρι τὰ ἐπίπεδα τέμνοντα, δεῖξαι δεῖ. τούτων δὲ αἱ ἀποδείξιες οὔπω σοι ἀποστέλλονται. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τᾶς ἕλικος ἦν προβεβλημένα ταῦτα. ἐντὶ δὲ ὥσπερ ἄλλο τι γένος προβλημάτων οὐδὲν ἐπικοινωνοῦντα τοῖς προειρημένοις, ὑπὲρ ὧν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὰς ἀποδείξιας γεγραφήκαμέν σοι. ἐστὶ δὲ τάδε.

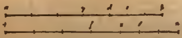
ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ.

Εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ, πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ τᾷ περιφερομένᾳ φέρηταί τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ, κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σημεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. φαμὶ δὴ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἀποκατασταθείσας ὅθεν ὥρμασεν, τρίτον μέρος εἶμεν τοῦ κύκλου τοῦ γραφέντος, κέντρον μὲν τοῦ μένοντος σημείου, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ τᾷ διανυσθείσᾳ ὑπὸ τοῦ σημείου ἐν τᾷ μιᾷ περιφορᾷ τᾶς εὐθείας. καὶ εἴ κα τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος τὸ ἔσχατον γενόμενον. ἄλλα δέ τις εὐθεῖα τᾷ περιαχθείσᾳ καὶ ἀποκατασταθείσᾳ γραμμᾷ ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ, ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, ὥστε ἐμπεσεῖν τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, φαμὶ τὰν ποταχθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσαν εἶμεν τᾷ τοῦ κύκλου περιφορᾷ. καὶ εἴ κα ἁ περιαγομένα γραμμὰ καὶ τὸ σημεῖον, τὸ φερόμενον κατ' αὐτᾶς, πλείονας περιφορὰς περιενεχθέωντι καὶ ἀποκατασταθέωντι πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, φαμὶ τοῦ χωρίου, τοῦ ἐν

τᾷ

τᾶς δευτέρας περιφορᾶς ποτιλαφθέντος ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τὸ μὲν ἐν τᾷ τρίτᾳ ποτιλαφθὲν διπλάσιον ἐσσεῖται, τὸ δὲ ἐν τᾷ τετάρτᾳ τριπλάσιον, τὸ δὲ ἐν τᾷ πέμπτᾳ τετραπλάσιον, καὶ ἀεὶ τὰ ἐν ταῖς ὕστερον περιφοραῖς ποτιλαμβανόμενα χωρία κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσια ἐσσεῖται, τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος. τὸ δὲ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθὲν χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος χωρίου. καὶ εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέωντι, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς περιενεχθείσας γραμμᾶς, καὶ κύκλοι δύο γραφέωντι κέντρῳ μὲν τῷ μεμενακότι σημείῳ, διαστήμασι δὲ ταῖς ἐπιζευχθείσαις ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς εὐθείας, καὶ ἐλάσσων τᾶν ἐπιζευχθεισᾶν ἐκβληθῇ, φαμὶ τὸ ποτιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς τοῦ μείζονος κύκλου περιφερείας τᾶς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἕλικι μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν ἐούσας, καὶ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας ποτὶ τὸ ποτιλαφθὲν χωρίον. ὑπό τε τᾶς τοῦ ἐλάσσονος κύκλου περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτῶν, τοῦτον ἕξειν τὸν λόγον ὃν ἔχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετ' ἑνὸς τριταμορίου τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς. τούτων δή μοι καὶ ἄλλων περὶ τᾶς ἕλικος αἱ ἀποδείξιες ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράφονται. προκεῖνται δὲ ὡς καὶ τῶν ἄλλων τῶν γεωμετρουμένων τὰ χρείαν ἔχοντα, εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν. λαμβάνω δὲ καὶ ἐν τούτοις τῶν ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις βιβλίοις λῆμμα τὸ τόδε. τᾶν ἀνίσων γραμμᾶν, καὶ τῶν ἀνίσων χωρίων τᾶν ὑπεροχᾶν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος αὐτὰ συντιθεμέναν, δυνατὸν εἶμεν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ' ἄλλαλα λεγομένων.

Εἴκα ἐπί τινος γραμμᾶς ἐνεχθῇ τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον, καὶ λαφθέωντι ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαί, αἱ ἀπολαφθεῖσαι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας, ὃν περ οἱ χρόνοι ἐν οἷς τὸ σημεῖον τὰς γραμμὰς ἐπορεύθη. ἐνηνέχθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τᾶς αβ γραμμᾶς ἰσοταχέως, καὶ λελάφθωσαν ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαὶ αἱ γδ, δε. ἔστω δὲ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὰν γδ γραμμὰν τὸ σημεῖον διεπορεύθη ὁ ζη, ἐν ᾧ δὲ τὰν δε ὁ ηθ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ γδ γραμμὰ ποτὶ τὰν δε γραμμάν, ὃν χρόνος ὁ ζη ποτὶ τὸν ηθ. συγκείσθωσαν γὰρ ἐκ τῶν γδ, δε γραμμᾶν αἱ αδ, δβ γραμμαὶ καθ' ἁντινοῦν σύνθεσιν οὕτως, ὥς τε ὑπερέχειν τὰν αδ τᾶς δβ. καὶ ὁσάκις μὲν σύγκειται ἁ γδ γραμμὰ ἐν τᾷ αδ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ χρόνος ὁ ζη ἐν τῷ χρόνῳ τῷ λη. ὁσάκις δὲ σύγκειται ἁ δε γραμμὰ ἐν τᾷ δβ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ θη χρόνος ἐν τῷ κη χρόνῳ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ σημεῖον ἰσοταχέως κεκινῆσθαι κατὰ τᾶς αβ γραμμᾶς, δῆλον ὡς ἐν ὅσῳ χρόνῳ τὰν γδ κεκίνηται, ἐν τοσούτῳ καὶ ἑκάσταν κεκίνηται τᾶν ἴσαν τᾷ γδ. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ συγκειμέναν τὰν αδ γραμμάν, ἐν τοσούτῳ χρόνῳ κεκίνηται ὅσος ἐστὶν ὁ λη χρόνος. ἐπειδὴ τοσαυτάκις σύγκειται ἅ τε γδ γραμμὰ ἐν τᾷ αδ γραμμᾷ, καὶ ὁ ζη χρόνος ἐν τῷ λη χρόνῳ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰν βδ γραμμὰν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ τὸ σημεῖον κεκίνηται, ὅσος ἐστὶν ὁ κη χρόνος. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἁ αδ γραμμὰ τᾶς βδ, δῆλον ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ τὸ σημεῖον τὰν δα διαπορεύεται γραμμὰν ἢ τὰν βδ. ὥς τε ὁ χρόνος ὁ λη μείζων ἐστὶ τοῦ κη χρόνου. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν εἴκα ἐκ τῶν χρόνων τῶν ζη, ηθ συντεθέωντι χρόνοι καθ' ἁντινοῦν σύνθεσιν, ὥς τε ὑπερέχειν τὸν ἕτερον τοῦ ἑτέρου, ὅτι καὶ τᾶν ἐκ τᾶν γραμμᾶν τᾶν γδ, δε, κατὰ τὰν αὐτὰν σύνθεσιν συντεθεισᾶν ὑπερέξει ἁ ὁμόλογος τῷ ὑπερέχοντι χρόνῳ. δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ γδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ὁ χρόνος ὁ ζη ποτὶ τὸν χρόνον τὸν ηθ. α



Εἴκα δύο σημείων ἑκατέρου ἐπί τινος γραμμᾶς ἐνεχθέντος, μὴ τᾶς αὐτᾶς ἰσοταχέως αὐτοῦ ἑαυτῷ φερομένου, λαφθέωντι ἐν ἑκατέρᾳ τᾶν γραμμᾶν δύο γραμμαὶ αἵ τε πρῶται ἐν ἴσοις χρόνοις ὑπὸ τῶν σαμείων διανυσθεῖσαι, καὶ αἱ δεύτεραι, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας αἱ λαφθεῖσαι γραμμαί. ἔστω ἐπὶ τᾶς αβ γραμμᾶς κινούμενόν τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ, καὶ ἄλλο ἐπὶ τᾶς κλ. λελάφθωσαν δὲ ἐν τᾷ αβ δύο αἱ γδ, δε γραμμαί, καὶ ἐν τᾷ κλ αἱ ζη, ηθ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ τὸ ἐπὶ τᾶς αβ γραμμᾶς κινούμενον σαμεῖον τὰν γδ γραμμὰν διαπορευέσθω, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον ἐπὶ τᾶς κλ κινούμενον τὰν ζη, ὁμοίως καὶ τὰν δε γραμμὰν ἐν ἴσῳ διαπορευέσθω τὸ σαμεῖον, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον τὰν ηθ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ γδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ἁ ζη β

λ 2 ποτὶ

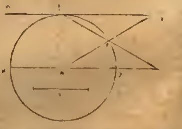
ποτὶ τὰν κθ. ἔστω δὴ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὰν γδ γραμμὰν διαπορεύεται τὸ σαμεῖον ὁ μν. ἐν τούτῳ δὴ τῷ χρόνῳ καὶ τὸ ἕτερον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ζη. πάλιν δὴ καὶ ἐν ᾧ τὰν δε γραμμὰν διαπορεύεται τὸ σαμεῖον, ἔστω ὁ νξ χρόνος. ἐν τούτῳ δὴ καὶ τὸ ἕτερον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ηθ. τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἕξουσιν ἅ τε γδ ποτὶ τὰν δε γραμμάν, ὃν ὁ χρόνος ὁ μν πρὸς τὸν νξ. καὶ ἁ ζη ποτὶ τὰν ηθ, ὃν ὁ χρόνος ὁ μν ποτὶ τὸν νξ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ γδ ποτὶ τὸν δε, ὃν ἁ ζη ποτὶ τὰν ηθ.



γ Κύκλων δοθέντων ὁποσωνοῦν τῷ πλήθει, δυνατόν ἐστιν εὐθεῖαν λαβεῖν μείζονα ἐοῦσαν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν. περιγραφέντος γὰρ περὶ ἕκαστον τῶν κύκλων πολυγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐκ πασῶν συγκειμένα τῶν περιμέτρων εὐθεῖα μείζων ἐσσεῖται πασᾶν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.

δ Δύο γραμμᾶν δοθεισᾶν ἀνίσων, εὐθείας τε καὶ κύκλου περιφερείας, δυνατόν ἐστι λαβεῖν εὐθεῖαν τᾶς μὲν μείζονος τᾶν δοθεισᾶν γραμμᾶν ἐλάσσονα, τᾶς δὲ ἐλάσσονος μείζονα. ὁσάκις γὰρ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων γραμμὰ τᾶς ἐλάσσονος αὐτὰ συντιθεμένα ὑπερέξει τᾶς εὐθείας, ἐπὶ τοσαῦτα ἴσα διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας, τὸ ἓν τμᾶμα ἔλασσον ἐσσεῖται τᾶς ὑπεροχᾶς. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ περιφέρεια μείζων τᾶς εὐθείας, ἑνὸς τμήματος ποτιτεθέντος ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, τᾶς μὲν ἐλάσσονος τᾶν δοθεισᾶν, δῆλον ὡς μείζων ἐσσεῖται, τᾶς δὲ μείζονος ἐλάσσων. καὶ γὰρ ἁ ποτικειμένα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑπεροχᾶς.

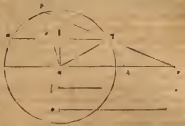
ε Κύκλου δοθέντος, καὶ εὐθείας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας, καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς, καὶ τᾶς διαχθείσας ὑπό τι τὰν δοθεῖσαν ὁποιανοῦν κύκλου περιφέρειαν. δεδόσθω κύκλος ὁ αβγ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ κ, καὶ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ δζ κατὰ τὸ β. δεδόσθω δὲ καὶ κύκλου περιφέρεια ὁποιαοῦν. δυνατὸν δέ ἐστι τᾶς δοθείσας περιφερείας λαβεῖν τινὰ εὐθεῖαν μείζονα, καὶ ἔστω ἁ ε εὐθεῖα μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας. ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν δζ, ἁ αη. καὶ κείσθω ἁ ηθ ἴσα τᾷ ε, νεύουσα ἐπὶ τὸ β. ἀπὸ δὲ τοῦ κ κέντρου ἐπὶ τὸ θ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἔχει ἁ θζ ποτὶ τὰν θκ, ὃν ἁ βθ ποτὶ τὰν θη. ἁ ἄρα ζθ ποτὶ τὰν θκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸν ἁ βθ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. διότι ἁ μὲν βθ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς βθ περιφερείας, ἁ δὲ θη μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει καὶ ἁ ζθ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἁ βθ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν.



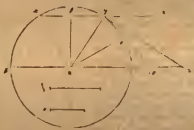
ς Κύκλου δοθέντος, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτὶ τὰν περιφέρειαν αὐτοῦ ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὰν ἐν τῷ κύκλῳ δεδομέναν γραμμάν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ποτιπιπτούσας ἐπὶ τᾶς περιφερείας, ποτὶ τὸ ἕτερον μέρος τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας εὐθείας, τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ᾖ, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δεδόσθω κύκλος ὁ αβγ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ κ. καὶ ἐν αὐτῷ δεδόσθω εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γα. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ πρὸς η, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ ποτὶ τὰν κθ, καθέτου οὔσας τᾶς κθ. ἄχθω δὴ καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου παράλληλος τᾷ αγ ἁ κν. καὶ τᾷ κγ ποτ' ὀρθὰς ἁ γλ. ὅμοια δή ἐστι τὰ γθκ, γκλ τρίγωνα. ἔστιν οὖν ὡς ἁ γθ ποτὶ τὰν θκ, οὕτως ἁ κγ ποτὶ τὰν γλ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, ἢ ἁ κγ ποτὶ τὰν γλ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ζ ποτὶ

τὰν

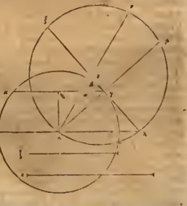
τὰν η. ἐπεὶ οὖν ἔχει ἁ κγ πρὸς μείονα τᾶς γλ. ἐχέτω τὰν βν. κείσθω δὲ ἁ βν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας διὰ τοῦ γ. δυνατὸν δὲ ἐστὶν οὕτως τεθῆμεν. καὶ πεσεῖται ἐκτός, ἐπεὶ μείζων ἐστὶ τᾶς γλ. ἐπεὶ οὖν ἁ βκ πρὸς βν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η, καὶ ἁ εβ ποτὶ βγ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ η.



Τῶν αὐτῶν δεδομένων, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας ἐκβεβλημένας, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου προσβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας, καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος γ ἀπολαφθείσας, ποτὶ τὸ πέρας τῆς ἐκβεβλημένης τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, αἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος μείζων ᾖ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ διδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δεδόσθω τὰ αὐτά, καὶ ἔστω ἁ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐκβεβλημένα. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ἔστω ὃν ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ ποτὶ τὰν θκ. μείζων οὖν ἐσσεῖται καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ κγ πρὸς γλ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ζ πρὸς η, τοῦτον ἕξει ἁ κγ πρὸς ἐλάσσονα τᾶς γλ. ἔστω πρὸς εν νεύουσαν ἐπὶ τὸ γ. δυνατὸν δὲ ἐστὶν οὕτως τέμνειν, καὶ πεσεῖται ἐντὸς τῆς γλ. ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς γλ. ἐπεὶ οὖν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ κγ πρὸς εν, ὃν ἁ ζ πρὸς η, καὶ ἁ ει πρὸς ιγ τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η. ζ

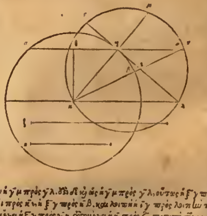


Κύκλου δοθέντος, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου, καὶ ἄλλας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν τινα εὐθεῖαν ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ διδομένας γραμμᾶς, ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ᾖ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ διδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. ἔστω κύκλος διδόμενος ὁ αβγδ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα διδόσθω, ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γα. καὶ ἁ ξλ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου κατὰ τὸ γ, καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ πρὸς η ἔστω ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ εθ πρὸς θκ. ἐσσεῖται δὴ ἐλάσσων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ γκ πρὸς γλ. εἴ κα παράλληλος ἀχθῇ ἁ κλ τᾷ βγ, ἐχέ- η



τω δὴ ἁ κγ πρὸς γξ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ζ πρὸς κ. μείζων δέ ἐστιν ἁ ξγ τᾶς γλ. γεγράφθω κύκλου περιφέρεια περὶ τὰ κλξ. ἐπεὶ οὖν ἐστι μείζων ἁ ξγ τᾶς γλ, καὶ ποτ᾽ ὀρθὰς ἐντὶ ἀλλάλαις αἱ κε ξλ, δυνατόν ἐστι τὰν μγ ἴσαν ἀλλάλαν θέμεν τὰν ιν, νεύουσαν ἐπὶ τὸ κ, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ξι ιλ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κε ιλ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ ξι πρὸς κε. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν κι ιν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κι γλ. ὥστε καὶ ἁ ιν πρὸς γλ ἐστιν, ὡς ἁ ξι πρὸς κε. ὥστε καὶ ἁ γμ πρὸς γλ, καὶ ἁ ξγ πρὸς κγ, καὶ πρὸς κβ ἐστιν, ὡς ἁ ξι πρὸς κε. καὶ λοιπὰ ἁ ιγ πρὸς βε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ξγ ποτὶ τὰν γκ, καὶ ὃν ἁ ποτὶ τὸ ζ. πεπτώκει οὖν ἁ κν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας ἁ βε ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν κ λόγον.

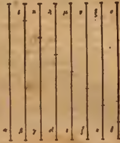
6 Τῶν αὐτῶν δεδομένων, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ἐκβεβλημένας, δυνατόν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν εὐθεῖαν, ὥστε ταὶ μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν, ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ποτὶ τὰν ἁφὰν τὸν ταχθέντα λόγον ἔχει. ἀνὰ ὁ δοθεὶς λόγος μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ ταὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγομέναν. δεδόσθω κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γα διήχθω, ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ ξγ κατὰ τὸ γ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν κ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ ποτὶ τὰν θκ. ἔσται δὴ μείζων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ κγ ποτὶ τὰν γλ. ἐχέτω οὖν ἁ κγ ποτὶ ταὶ γξ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ ταὶ κ. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν αὕτα ταῖς γλ. πάλιν δὴ περιγράφθω κύκλος διὰ τῶν ξκλ σαμείων. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ξγ τᾶς γλ, καὶ ποτ᾽ ὀρθάς ἐστιν ἀλλάλαις αἱ κμ, ξγ, δυνατόν ἐστι τὰν γμ ἴσαν θέμεν τὰν ιν νεύουσαν ἐπὶ τὸ κ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ξι λ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λι κε ἐστιν, ὡς ξι πρὸς κε. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ξιλ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν κιν. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν λι κε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν κι γλ, διὰ τὸ εἶναι ὡς τὰν κε πρὸς ει. οὕτως τὰν λγ πρὸς λι. καὶ ὡς ἄρα ἁ ξι πρὸς κε, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν κιν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κι γλ. τουτέστιν ὡς νι πρὸς γλ, τουτέστιν ἁ γμ πρὸς γλ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἁ γμ πρὸς γλ, οὕτως ἁ ξγ πρὸς κγ, τουτέστι πρὸς κβ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ ξι πρὸς κε, ἁ ξγ πρὸς κβ. καὶ λοιπὰ ἁ ιγ πρὸς λοιπὰν τὰν βε ἐστιν, ὡς ἁ ξγ πρὸς γκ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ξγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει ἁ κ πρὸς ζ. πεπτώκει δὴ ἁ κε ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, καὶ ἁ μεταξὺ τᾶς ἐκβεβλημένας καὶ τᾶς περιφερείας ἁ βε ποτὶ ταὶ γε, ταὶ ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ἀπολαφθεῖσαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὸ μν.



Εἴκα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾶ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα τᾶ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῦ ἴσαν τᾶ μεγίστᾳ, ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετράγωνον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἐλαχίστας καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχούσαις, τριπλάσια ἐσσοῦνται τῶν τετραγώνων πάντων, τῶν ἀπὸ ταῦ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. ἔστω γραμμαὶ ὁποσαιοῦν ἐφεξῆς κείμεναι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ἁ δὲ θ ἴσα ἔστω τᾶ ὑπεροχᾶ. ποτικείσθω δὲ ποτὶ ταὶ β ἴσα τᾶ θ ἁ ι, ποτὶ δὲ τὰν γ ἁ κ ἴσα τᾶ η. ποτὶ δὲ τὰν δ ἁ λ ἴσα τᾶ ζ. ποτὶ δὲ τὰν ε ἁ μ ἴσα τᾶ ε. ποτὶ δὲ τὰν ζ ἁ ν ἴσα τᾶ δ. ποτὶ δὲ ταὶ η ἁ ξ ἴσα τᾶ γ. ποτὶ δὲ τὰν θ ἁ ο ἴσα τᾶ β. ἐσσοῦνται δὲ αἱ γινόμεναι ἴσαι ἀλλάλαις, καὶ τᾶ μεγίστᾳ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν τε α, καὶ τᾶν γινομέναν, ποτιλαβόντα τό τε ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, τριπλάσιά ἐντι τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν

α, β,

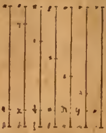
α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς β ι τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ι, β τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν β, ι περιεχομένοις. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς κ γ, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν κ, γ τετραγώνοις, καὶ δύο δὶς ὑπὸ τῶν κ, γ περιεχομένοις. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλαν τᾶν ἴσαν τᾶ α τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων περιεχομένοις. τὰ μὲν οὖν ἀπὸ τᾶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο ποτιλαβόντα τὸ ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, διπλάσια ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ τετραγώνων. λοιπὸν δὲ ἐπιδείξομεν, ὅτι τὰ διπλάσια τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν τμαμάτων ἐν ἑκατέρᾳ γραμμᾷ τᾶν ἴσαν τᾶ α, ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ἴσα δὶς ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. καὶ ἐπεὶ δύο μὲν τὰ ὑπὸ β, ι περιεχόμενα, ἴσα δυσὶ τοῖς ὑπὸ τῶν β, θ περιεχομένοις. δύο δὲ τὰ ὑπὸ τῶν κ, γ ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς γ, διὰ τὸ τὰν κ διπλασίονα εἶμεν τᾶς θ. δύο δὲ τὰ ὑπὸ τᾶν δ, λ ἴσα τῷ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς δ, διὰ τὸ τὰν λ τριπλασίαν εἶμεν. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων, ἴσα ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς πολλαπλασίας ἀεὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς, ἀρτίους τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. τὰ οὖν σύμπαντα ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ἐσσεῖται ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσου πάσαις τᾶ τε α, καὶ τᾶ τριπλασίᾳ τᾶς β, καὶ τᾶ πενταπλασίᾳ τᾶς γ. καὶ ἀεὶ τᾶ περισσαῖς κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίοις τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ τετράγωνα ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν αὐτᾶν γραμμᾶν. ἐστὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾶ τε α καὶ τᾶ ἴσᾳ ταῖς λοιπαῖς, ὧν ἑκάστα ἴσα τᾶ α. ἰσάκις γὰρ μετρεῖ ἅτε θ τὰν α, καὶ ἁ α τὰς ἴσας αὐτᾶ πάσας σὺν τᾶ α. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α τετράγωνον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας τᾶ α, καὶ τᾶ διπλασίᾳ τῶν β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. αἱ γὰρ ἴσαι τᾶ α πᾶσαι χωρὶς τᾶς α, διπλάσιαι ἐστὶ τᾶν β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας, τᾶ τε β καὶ τᾶ διπλασίᾳ τᾶν γ, δ, ε, ζ, η, θ. καὶ πάλιν τὸ ἀπὸ τᾶς γ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας τᾶ τε γ, καὶ τᾶ διπλασίᾳ τᾶν ε, ζ, η, θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλαν τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς περιεχομένοις ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας αὐτᾶ τε καὶ τᾶ διπλασίᾳ τᾶν λοιπᾶν. δῆλον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾶ τε α, καὶ τᾶ τριπλασίᾳ τᾶς β, καὶ τᾶ πενταπλασίᾳ τᾶς γ. καὶ τὰ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλάσια τᾶς ἑπομένας.



Ἐκ τούτου οὖν φανερὸν, ὅτι τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστᾳ, τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια. ἐπεὶ δὲ ποτιλαβόντα τινὰ τριπλάσια ἐστί. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστης τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ τὰ ποτιλαφθέντα ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου. καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια εἴδεα ἀναγεγράφωντι, ἀπὸ πασᾶν ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστᾳ, τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων, ἐλάσσονα ἐσσοῦνται, ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας εἴδεος, μείζονα ἢ τριπλάσια. τὸν γὰρ αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

Εἴκα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τε- ια
θέωντι, τᾷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τῷ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐ-
λαχί-

λαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετραγώνου, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου, μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ γραμμαὶ ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἑξῆς κείμεναι, ἁ μὲν αβ τᾶς γδ, ἁ δὲ γδ τᾶς εζ, ἁ δὲ εζ τᾶς ηθ, ἁ δὲ ηθ τᾶς ικ, ἁ δὲ ικ τᾶς λμ, ἁ δὲ λμ τᾶς νξ. ποτικείσθω δὴ ποτὶ μὲν τὰν γδ ἴσα μιᾷ ὑπεροχᾷ ἁ γο. ποτὶ δὲ τὰν εζ ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς, ἁ επ. ποτὶ δὲ τὰν ηθ ἴσα τρισὶν ὑπεροχαῖς ἁ ηρ. καὶ ποτὶ τὰς ἄλλας τὸν αὐτὸν τρόπον. ἐσσοῦνται δὴ αἱ γινόμεναι ἀλλάλαις ἴσαι, καὶ ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ. δεικτέον ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν γινομέναν τετράγωνα, ποτὶ μὲν πάντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς νξ τετραγώνου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς αβ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν αβ, νξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς νυ τετραγώνου. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς αβ τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκάστας τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς αβ ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ τᾶν αβ, φβ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αφ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει λόγον τό, τε ἀπὸ τᾶς οδ τετράγωνον, ποτὶ τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν οδ, δχ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς χο τετραγώνου, τὸ ἀπὸ τᾶς πζ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν πζ, ψζ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ψπ τετραγώνου, ἀπὸ τᾶν ἄλλαν τετράγωνα, ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία.



καὶ τὰ πάντα δὴ τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν οδ, πζ, ρθ, σκ, τμ, υξ, ποτὶ τε πάντα περιεχόμενα ὑπό τε τᾶς νξ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς εἰρημέναις γραμμαῖς. καὶ τὰ τριταμόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν οχ, πψ, ρω, σλ, τγ, υν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αβ τετράγωνον ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ τᾶν αβ, φβ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ φα τετραγώνου. εἰ οὖν κα δειχθῇ τό, τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς νξ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς οδ, πζ, ρθ, σκ, τμ, υξ, καὶ τὰ τρίτα μέρη τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν οχ, πψ, ρω, σλ, τγ, υν, τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν αβ, γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, ἐλάσσονα. τῶν δὲ τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, νξ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν. ἐστὶ δὴ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς νξ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς οδ, πζ, ρθ, σκ, τμ, υν. καὶ τὰ τρίτα μέρη τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν οχ, πψ, ρω, σλ, τγ, υν, ἴσον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ χδ, ψζ, ωθ, λκ, γμ, νξ, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς νξ, καὶ ἴσας πάσαις ταῖς οχ, πψ, ρω, σλ, τγ, υν. καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν οχ, πψ, ρω, σλ, τγ, υν. τὰ δὲ ἀπὸ τᾶν αβ, γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τᾶν βφ, χδ, ψζ, ωθ, λκ, γμ τετραγώνοις, καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν αφ, γχ, εψ, ηω, ιλ, λγ. καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς βφ, καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν αφ, γχ, εψ, ηω, ιλ, λγ. κοινὰ μὲν οὖν ἐστὶν ἑκατέρων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ νξ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς νξ, καὶ τᾶς ἴσας ταῖς οχ, πψ, ωρ, λσ, γτ, υν, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς βφ, καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν αφ, γχ, εψ, ηω, ιλ, λγ. διὰ τὸ τὰς νῦν εἰρημένας γραμμὰς ταῖς μὲν γο, επ, ηρ, ισ, λτ, υν, ἴσας εἶμεν, τᾶν δὲ λοιπᾶν μείζονας. καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αφ, γχ, εψ, ηω, ιλ, λγ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς ἐπάνω. ἐλάττονα ἄρα ἐστὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν αβ, γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ. λοιπὸν δὲ δείξομεν, ὅτι μείζονα ἐστὶ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, νξ. πάλιν δὴ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, νξ, ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τᾶν γχ, εψ, ηω, ιλ, λγ, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς νξ, καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν γχ, εψ, ηω, ιλ, λγ. καὶ ἔτι κοινὰ μὲν τὰ ἀπὸ τᾶν χδ, ψζ, ωθ, λκ, μγ, νξ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπό τε τᾶς νζ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς οχ, πψ, ρω, σλ, τγ, υν, τοῦ ὑπὸ τᾶς νξ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν γχ, εψ, ηω, ιλ, λγ. ἐστὶ δὲ καὶ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν χο, ψπ, ωρ, λσ, γτ, υν, τῶν ἀπὸ τᾶν γχ, εψ, ηω, ιλ, λγ, μείζονα ἢ τριπλάσια. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, νξ.

Καὶ

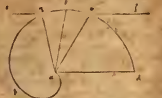
Καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια ἀναγραφῇ εἴδη ἀπὸ πασᾶν, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, εἴδεα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας εἴδεος, ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν εἴδεα χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. τὸν αὐτὸν γὰρ ἕξουσι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

Εἴκα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς, ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσάκις οὖν ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηται τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιαγομένας αὐτᾶς, ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς ἀφ' ἇς ἄρξατο ἁ εὐθεῖα περιφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. εὐθεῖα αὖ ἃν ἐν τᾷ πρώτᾳ τᾷ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαμεῖον, τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω. ἃν δὲ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσῃ, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτον καλείσθω. τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας, δεύτερον καλείσθω. καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω. καὶ εἴκα ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμά, τᾶς εὐθείας ταύτας ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἁ περιφορὰ γίνεται, προαγομένα καλείσθω. τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἑπόμενα. ὁ τε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σαμείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτος καλείσθω. ὁ δὲ γραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ διπλασίᾳ εὐθείᾳ, δεύτερος καλείσθω. καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν μὲν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, εὐθεῖαι ιβ
ἐμπεσοῦντι ὁποσαιοῦν, ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ' ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ ὑπερέχοντι ἀλλάλαν. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς αἱ αβ, αγ, αδ, αε, αζ ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτ' ἀλλάλας. δεικτέον ὅτι τῷ ἴσῳ ὑπερέχει ἁ αγ τᾶς αβ, καὶ ἁ αδ τᾶς αγ, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως. ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπὸ τᾶς αβ ἐπὶ τὰν αγ ἀφικνεῖται, ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ σαμεῖον τὸ ἐπὶ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν ὑπεροχὰν διαπορεύεται, ᾇ ὑπερέχει ἁ γα τὰν αβ. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἀπὸ τᾶς αγ ἐπὶ τὰν αδ, ἐν τούτῳ διαπορεύεται τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ αδ τᾶς αγ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπό τε τᾶς αβ ἐπὶ τὰν αγ ἀφικνεῖται, καὶ ἀπὸ τᾶς αγ ἐπὶ τὰν αδ. ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἴσαι ἐντί. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ ἐπὶ τᾶς εὐθείας φερόμενον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ὑπεροχὰν, ᾇ ὑπερέχει ἁ αγ τᾶς αβ, καὶ τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ αδ τᾶς αγ. τῷ ἴσῳ ἄρα ὑπερέχει ἁ αγ τᾶς αβ, καὶ ἁ αδ τᾶς αγ, καὶ αἱ λοιπαί.

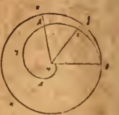


Εἴκα εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ, ιγ
καθ' ἓν μόνον ἐπιψαύσει σαμεῖον. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς τὰ αβγδ. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ α σαμεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ αδ εὐθεῖα. καὶ ἐπιψαυέτω τᾶς ἕλικος εὐθεῖά τις ἁ ζε. φαμὶ δὴ καθ' ἓν μόνον σαμεῖον ἐπιψαύειν αὐτᾶς. ἐπιψαυέτω γὰρ, εἰ δυνατὸν, κατὰ δύο σαμεῖα τὰ γ, η. καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ αγ, αη. καὶ ἁ γωνία δίχα τετμάσθω ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν αη, αγ. καθ' ὃ δὲ σαμεῖον ἁ δίχα τέμνουσα τὰν γωνίαν τᾷ ἕλικι ποτιπίπτει, ἔστω τὸ θ. τῷ δὴ ἴσῳ ὑπερέχει ἅτε αη τᾶς αθ, καὶ ἁ αθ τᾶς αγ. ἐπειδὴ ἴσας γωνίας περιέχοντι ὑπὸ τὰν ἀλλάλας. ὥστε διπλασίας ἐντὶ αἱ αη, αγ τᾶς αθ. ἀλλὰ τᾶς ἐν τῷ τριγώνῳ τᾶς αθ δίχα τεμνούσας τὰν γωνίαν, μείζονες ἐντὶ ἢ διπλασίαι. δῆλον οὖν ὅτι καθ' ὃ συμπίπτει τὸ σαμεῖον τᾷ γη εὐθείᾳ ἁ αθ, μεταξύ ἐστι τῶν θ, α ἐντὶ σαμείων, τέμνει ἄρα ἁ εζ τὰν ἕλικα, ἐπεί γέ τι τῶν ἐν τᾷ γη σαμείων ἐν-

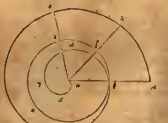


τὸς δὲ τᾶς ἕλικος. ὑπέκειτο δὲ ἐπιψαύουσα, καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅπτεται ἁ ε κ τᾶς ἕλικος.

Δ Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ποτιπεσῶντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὴν τοῦ πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, αἱ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος, καὶ τῶν περάτων τᾶν ἐκβληθεισᾶν εὐθειᾶν τῶν ἐπὶ τᾶς περιφερείας γινομένων, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομένων τᾶν περιφερειᾶν, ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος. ἔστω ἕλιξ ἁ α β γ δ ε θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἕλικος ἔστω τὸ α σαμεῖον. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω καὶ κύκλος ὁ θ κ η, ἔστω ὁ πρῶτος. ποτιπιπτόντων δὲ ἀπὸ τοῦ α σαμείου ποτὶ τὰν ἕλικα, αἱ α ε, α δ. καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐπὶ τὰ ζ, η. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α ε ποτὶ τὰν α δ, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ η περιφέρειαν. περιαγομένας γὰρ τᾶς α θ γραμμᾶς, δῆλον ὡς τὸ μὲν θ σαμεῖον κατὰ τᾶς θ κ η κύκλου περιφερείας ἐνηνεγμένον ἐστὶν ἰσοταχέως. τὸ δὲ α κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν α θ γραμμὰν πεπορεύεται. καὶ τὸ θ σαμεῖον κατὰ τᾶς κύκλου περιφερείας φερόμενον, τὰν θ κ ζ περιφέρειαν. τὸ δὲ α τὰν α ε εὐθεῖαν. καὶ πάλιν τό τε α σαμεῖον τὰν α δ γραμμάν. καὶ τὸ θ τὰν θ κ η περιφέρειαν, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α ε ποτὶ τὰν α δ, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ η περιφέρειαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς πρώτοις. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ εἴκα ἁ ἑτέρα τᾶν ποτιπιπτουσᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ποτιπίπτῃ, τὸ αὐτὸ συμβαίνει.

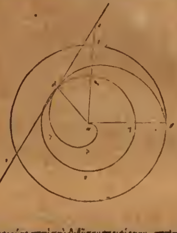


ιε Εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομένας. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ θ, ἁ μὲν α β γ δ θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θ λ ε μ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ποτιπιπτόντων εὐθεῖαι αἱ α ε, α λ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α λ ποτὶ τὰν α ε, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, πρὸς θ κ η μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐν ὅσῳ γὰρ χρόνῳ τὸ α σαμεῖον κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν α λ γραμμὰν διαπορεύεται, καὶ τὸ θ σαμεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν θ κ ζ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ πάλιν τὸ α σαμεῖον τὰν α ε εὐθεῖαν κατὰ τὸ ε, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν θ κ η, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ αὑτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α λ γραμμὰ ποτὶ τὰν α ε, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν θ κ η περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τρίτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπεσῶντι εὐθεῖαι, τὸν αὐτὸν λόγον ἑξοῦντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν εἰρημέναι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας δὶς λαμβανομένας. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ποτὶ τὰς ἄλλας ἕλικας ποτιπίπτουσαι δειχθήσονται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν ἁ εἰρημένα περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαύτας λαμβανομένας, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς τᾶν περιφορᾶν, καὶ εἴκα ἁ ποτιπίπτουσα ἁ ἑκατέρα ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος πίπτῃ.



Εἴκα

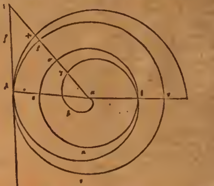
Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σαμεῖον, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἃς ποιεῖ γωνίας ἁ ἐφαπτομένα ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἄνισοι ἐσσοῦνται, καὶ ἁ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἁ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖα. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς τὰ α β γ δ θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν α σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ α θ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὅ τε πρῶτος κύκλος, ὁ θ κ η. ἐπιψαυέτω δέ τις εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δ ε ζ κατὰ τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἁ δ α. δεικτέον ὅτι ἁ δ ζ ποτὶ τὰν α δ ἀμβλεῖαν ποιεῖ γωνίαν. ις



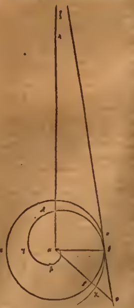
γεγράφθω κύκλος ὁ δ τ ν, κέντρον μὲν τὸ α, διάστημα δὲ τὸ α δ. ἀναγκαῖον δὴ τούτου τοῦ κύκλου τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις περιφέρειαν ἐντὸς πίπτειν τᾶς ἕλικος, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός, διὰ τὸ τὰς ἀπὸ τοῦ α ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσας εὐθείας, τᾶς μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις μείζονας εἶμεν τᾶς α δ, τᾶς δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐλάσσονας. ὅτι μὲν οὖν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν α δ ζ οὐκ ἔστιν ὀξεῖα, δῆλον. ἐπειδὴ μείζων ἐστὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου. ὅτι δὲ ὀρθὰ οὐκ ἔστι, δεικτέον οὕτως. ἔστω γὰρ δυνατὸν ὀρθά. ἁ ἄρα ε δ ζ ἐπιψαύει τοῦ δ τ ν κύκλου. δυνατὸν δή ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν, ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς ποτιπιπτούσας περιφερείας, ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. ποτιπιπτέτω δὴ ἁ α ι. τέμνει δὴ αὐτὰ τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ λ. τὰν δὲ τοῦ δ ν τ περιφέρειαν κύκλου κατὰ τὸ ρ. καὶ ἐχέτω ἁ ρ ι εὐθεῖα ποτὶ τὰν α ρ ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρ δ ν τ περιφέρεια ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν. τουτέστιν, ὃν ἔχει ἁ σ η κ θ περιφέρεια ποτὶ τὰν η κ θ περιφέρειαν. ὃν δὲ ἁ σ η κ θ περιφέρεια ποτὶ τὰν η κ θ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ α λ εὐθεῖα ποτὶ τὰν α δ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ α ι ποτὶ τὰν α ρ, ἤπερ ἁ λ α ποτὶ τὰν α δ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσα γὰρ ἁ ρ α τᾷ α δ. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὰ ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν α δ ζ. δέδεικται δέ, ὅτι οὐδὲ ὀξεῖα. ἀμβλεῖα ἄρα ἐστίν. ὥστε ἁ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστίν. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ, τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

Καὶ τοίνυν εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ ἁ εὐθεῖα, τὸ αὐτὸ συμβήσεται. ἐπιψαυέτω γὰρ ἁ ε ζ εὐθεῖα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ δ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ὁμοίως δὴ τᾶς τοῦ ρ ν δ περιφερείας κύκλου, τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις τᾶς ἕλικος ἐντὸς πεσοῦνται, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός. ἁ οὖν γωνία, ἁ ὑπὸ τᾶν α δ ζ, οὐκ ἔστιν ὀρθά, ἀλλ᾽ ἀμβλεῖα. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ὀρθά. ἐπιψαύσει δὴ ἁ ε ζ τοῦ ρ ν δ κύκλου κατὰ τὸ δ. ἄχθω δὴ πάλιν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν ἁ α ι. καὶ τεμνέτω τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ χ, τὰν δὲ τοῦ ρ ν δ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ ρ. ἐχέτω δὲ ἁ ρ ι ποτὶ ρ α ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ ὅλαν τὰν τοῦ δ ρ ν κύκλου περιφέρειαν, καὶ ποτὶ τὰν δ ν τ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρ δ ν τ περιφέρεια μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν, μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἀλλ᾽ ὃν λόγον ἔχει ἁ ρ δ ν τ περιφέρεια μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ δ ν τ ρ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν, μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ δ ν τ ρ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ σ η κ θ περιφέρεια, μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τᾶς θ σ η κ, ποτὶ τὰν η κ θ περιφέρειαν, μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ ιζ

θσκ κύκλου περιφερείας. ὃν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ ὕστερον ἀρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χα εὐθεῖα ποτὶ τὰν αδ εὐθεῖαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ια ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ αχ ποτὶ τὰν αδ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσα μὲν γὰρ ἁ ρα τᾷ αδ, μείζων δὲ ἁ ια τᾶς αχ. δῆλον οὖν ὅτι ἀμβλεῖα ἐστὶν ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν αδ ζ. ὥστε ἁ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστί. τὰ δὲ αὐτὰ συμβήσονται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα, καὶ εἴκα ἐπὶ τὸ πέρας αὐτᾶς, ὅτι ἀνίσους ποιήσει τὰς γωνίας ποτὶ τὰν ἐκ τᾶς ἁφᾶς ἐπιζευχθεῖσαν ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖαν, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις, ὀξεῖαν.

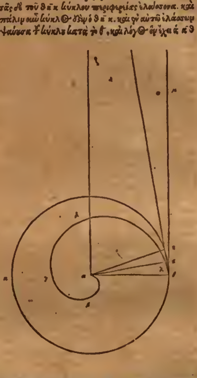


ιη Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἐν ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος ποτ᾽ ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ. καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ. ἔστω ἕλιξ ἁ αβγδ. ἔστω δὲ τὸ α σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θα γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ θηκ κύκλος ὁ πρῶτος. ἐπιψαυέτω δέ τις τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ θ, ἁ θζ. καὶ ἀπὸ τοῦ α ἄχθω ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ θα, ἁ αζ. συμπεσεῖται δὴ αὐτᾷ ποτὶ τὰν θζ. ἐπεὶ αἱ ζθ, θα ὀξεῖαν γωνίαν περιέχοντι. συμπιπτέτω κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζα ἴσα ἐστὶ τᾷ τοῦ θηκ κύκλου περιφερείᾳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν, ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν, μείζων. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν τὰν λα, τᾶς μὲν ζα εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας μείζονα. ἔστι δὴ κύκλος τις ὁ θηκ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ θη. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ θα πρὸς αλ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ηθ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμέναν. διότι καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θα πρὸς αζ. δυνατὸν οὖν ἐστὶν, ἐκ τοῦ α ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν τὰν ἐκβεβλημέναν τὰν αν. ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν νρ, πρὸς θρ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θα ποτὶ τὰν αλ. ἑξεῖ οὖν ἁ νρ, ποτὶ τὰν ρα λόγον, ὃν ἁ θρ εὐθεῖα ποτὶ τὰν αλ. ἁ δὲ θρ ποτὶ τὰν αλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θηκ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θρ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς θρ περιφερείας. ἁ δὲ αλ εὐθεῖα τᾶς τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας μείζων. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει καὶ ἁ νρ πρὸς ρα, ἢ ἁ θρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θηκ κύκλου περιφέρειαν. καὶ ὅλα οὖν ἁ να ποτὶ τὰν αρ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ θρ περιφέρεια μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ κύ-



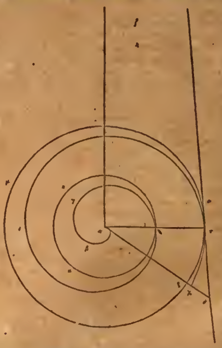
τᾶς κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τᾶς θ ν κ κύκλου περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ θ ρ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τᾶς θ ν κ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τᾶς θ ν κ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χ α ποτὶ τὰν α θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ν α ποτὶ τὰν α ρ, ἤπερ ἁ χ α ποτὶ τὰν α θ, ὅπερ ἀδύνατον. ἁ μὲν γὰρ ν α μείζων ἐστὶ τᾶς α χ. ἁ δὲ α ρ ἴσα ἐστὶ τᾷ θ α. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζ α τᾶς τᾶς κύκλου περιφερείας, τᾶς θ ν κ.

Ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἁ ζ α τᾶς τᾶς θ ν κ κύκλου περιφερείας. ἐλάβομεν δὴ ἴσαν εὐθεῖαν πάλιν τὰν α λ, τᾶς μὲν α ζ μείζονα, τᾶς δὲ τοῦ θ ν κ κύκλου περιφερείας ἐλάσσονα. καὶ ἄγω ἀπὸ τᾶς θ τὰν θ μ παράλληλον τᾷ α ζ. πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ θ ν κ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐλάσσων γραμμὰ τᾶς διαμέτρου ἁ θ κ. καὶ ἄλλα ἐπιψαύουσα τᾶς κύκλου κατὰ τὸ θ, καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ α θ ποτὶ τὰν α λ, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς κ θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τᾶς α καθέτον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. ἐπειδὴ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α ζ, ἐλάσσων ἐστί. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τᾶς α ἀγαγεῖν τὰν α π ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν. ὥστε τὰν ρ ν τὰν μεταξὺ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας, καὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὰν θ π, ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ θ α ποτὶ τὰν α λ. τεμεῖ δὴ ἁ α π τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἕξει καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ν ρ πρὸς ρ α, ὃν ἁ θ π πρὸς α λ. ἁ δὲ θ π ποτὶ τὰν α λ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ ν κ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θ π εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τᾶς θ ρ περιφερείας, ἁ δὲ α λ ἐλάσσων τᾶς τᾶς θ ν κ κύκλου περιφερείας. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ν ρ ποτὶ τὰν α ρ, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τᾶς θ ν κ κύκλου περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ ρ α ποτὶ τὰν α ν μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τᾶς θ ν κ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ ρ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ τᾶς θ ν κ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ ρ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ θ α εὐθεῖα ποτὶ τὰν α χ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρ α ποτὶ τὰν α ν, ἢ ἁ α θ ποτὶ τὰν α χ. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστίν, οὐδὲ ἐλάσσων ἁ ζ α τᾶς τᾶς θ ν κ κύκλου περιφερείας. ἴσα ἄρα.



Εἰ δὲ κατὰ τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύοι εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ εὐθεῖα ἁ μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, διπλασία τᾶς τᾶς δευτέρου κύκλου περιφερείας. ἔστω γὰρ ἁ μὲν α β, γ θ ἕλιξ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θ ε τ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ὁ μὲν θ ν κ κύκλος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τ μ ν ὁ δεύτερος. ἔστω δέ τις γραμμὰ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ τ, ἁ τ ζ. ἁ δὲ ζ α ποτ' ὀρθὰς ἄχθω τᾷ τ α. συμπεσεῖται δὴ τὰ αὐτὰ τᾷ τ ζ, διὰ τὸ δεδεῖχθαι τὰν γωνίαν ὀξεῖαν οὖσαν τὰν ὑπὸ τῶν α τ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζ α εὐθεῖα διπλασία ἐστὶ τᾶς τᾶς τ μ ν κύκλου περιφερείας. εἰ γὰρ μή ἐστι διπλασία, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία, ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων ἢ διπλασία. καὶ λελάφθω τις εὐθεῖα, ἁ λ α τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ τοῦ τ μ ν κύκλου περιφερείας μείζων ἢ διπλασία. ἔστι δή τις κύκλος ὁ τ μ ν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γεγραμμένα ιθ

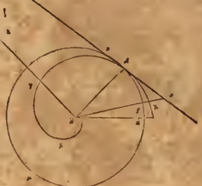
ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ τν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ τα ποτὶ τὰν αλ, μείζονα τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς τν ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγομέναν. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν τὰν ασ, ποτὶ τὰν τν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ρσ ποτὶ τὰν τρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ τα ποτὶ τὰν αλ. τέμνει δὲ ἁ ασ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ρσ ποτὶ τὰν τα, ὃν ἁ τρ ποτὶ τὰν αλ. ἁ δὲ τρ ποτὶ τὰν αλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τοῦ μ κύκλου περιφέρειαν. ἐστὶ γὰρ ἁ μὲν τρ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς τρ περιφερείας. ἁ δὲ αλ εὐθεῖα μείζων ἢ διπλασία τᾶς τοῦ μ κύκλου περιφερείας. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρσ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς τοῦ μ κύκλου περιφερείας. ὅλα οὖν ἁ σα ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια μετὰ τᾶς τοῦ μ κύκλου περιφερείας δὶς εἰρημένας, ποτὶ τὰν τοῦ μ κύκλου περιφέρειαν δὶς εἰρημέναν. ὃν δὲ λόγον ἔχουσιν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χα ποτὶ τὰν ατ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἁ ασ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ χα ποτὶ τὰν τα, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἁ ζα εὐθεῖα τᾶς τοῦ μ κύκλου περιφερείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἢ διπλασία. δῆλον οὖν, ὅτι διπλασία ἐστί. διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικτέον. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύει τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθεῖσα τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς συμπίπτῃ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τᾶς περιφορᾶς λεγομένου τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ.



κ Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ ἐπιζευχθείσᾳ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθείσᾳ, συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς τε συμπτώσιος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα τᾷ περιφερείᾳ τοῦ γραφέντος κύκλου τᾷ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς τομᾶς, καθ' ὃ τέμνει ὁ γραφεὶς κύκλος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομένας τᾶς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σαμείου τοῦ ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδ ἐν τᾷ πρώτᾳ γεγραμμένα, καὶ ἐπιψαυέτω τις αὐτᾶς εὐθεῖα ἁ δε κατὰ τὸ δ. ἀπὸ δὲ τοῦ δ ποτὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζεύχθω ἁ αδ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ κύκλος γεγράφθω, ὁ δμν. τεμνέτω δὲ οὗτος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸ κ. ἄχθω δὲ ἁ ζα ποτὶ τὰν αδ ὀρθά. ὅτι μὲν οὖν αὐτᾷ συμπίπτει, δῆλον. ὅτι δὲ καὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζα εὐθεῖα τᾷ κμνδ περιφερείᾳ, δεικτέον. εἰ γὰρ

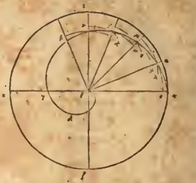
μὴ

μὰ, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω ἀδυνατόν, πρότερον μείζων. λελάφθω δή τις ἁ λ̄α τᾶς μὲν ζ̄α εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ κμ̄δ περιφερείας μείζων· πάλιν δὴ κύκλος ἐστὶν ὁ κμ̄ν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ δ̄ν. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ δ̄α πρὸς α̅λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς δ̄ν, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α̅ κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α̅ ποτιλαβεῖν τὰν α̅ε ποτὶ τὰν ν̄δ ἐκβεβλημέναν. ὥστε τὰν ε̄ρ ποτὶ τὰν δ̄ρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ δ̄α ποτὶ τὰν α̅λ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. ἕξει οὖν καὶ ἁ ε̄ρ ποτὶ τὰν α̅ρ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δ̄ρ ποτὶ τὰν α̅λ. ἁ δὲ α̅ρ ποτὶ τὰν α̅λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ δ̄ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κμ̄δ περιφέρειαν. ἐπεὶ ἁ μὲν δ̄ρ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς δ̄ρ περιφερείας. ἁ δὲ α̅λ μείζων τᾶς κμ̄δ περιφερείας ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ἁ ε̄ρ εὐθεῖα πρὸς ρ̄α, καὶ ἁ δ̄ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κμ̄δ περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ α̅ε πρὸς α̅ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ κμ̄ρ περιφέρεια πρὸς κμ̄δ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ κμ̄ρ πρὸς τὰν κμ̄δ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χ̄α πρὸς α̅δ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ ε̄α πρὸς α̅ρ, ἢ ἁ α̅χ πρὸς δ̄α. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζ̄α τᾶς κμ̄δ περιφερείας. ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστίν. ἴσα ἄρα. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν τρόπων δειχθήσεται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθῇ, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν συμπιπτούσας, ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐστὶν ὅλᾳ τᾷ τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείᾳ, καὶ ἔτι τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὡσαύτως τᾶς περιφερείας λαμβανομένας. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν γεγραμμένας περιφορᾷ ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τῶν εἰρημένων σαμείων πολλαπλασία τίς ἐστι τᾶς τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείας, κατὰ τὸν ἐλάττονα ἀριθμὸν τοῦ καθ' ὃν αἱ περιφοραὶ λέγονται, καὶ ἔτι ἴσα τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὁμοίως λαμβανομένας.



Λαμβανόντων τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ α̅β̅γ̅δ̄, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ̄ σημεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ θ̄α. ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ ζηι̅α. αἱ δὲ α̅η, ζ̄ι διάμετροι αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλάλαις. ἀεὶ δὴ τᾶς ὀρθᾶς γωνίας δίχα τεμνομένας καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ τομέως ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ τομεὺς ὁ α̅θ̄κ ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρήσθωσαν δὴ οὖν γωνίαι αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας τᾷ περιεχομένᾳ ὑπὸ τῶν α̅θ̄, θ̄κ. καὶ αἱ ποιοῦσαι τὰς γωνίας εὐθεῖαι ἕως ἐπὶ τὰν ἕλικα ἀχθῶσι. καθ' ὃ δὴ τέμνει σημεῖον ἁ θ̄κ τὰν ἕλικα, ἔστω τὸ λ̄. καὶ κέντρῳ τῷ θ̄, διαστήματι δὲ τῷ θ̄λ κύκλος γεγράφθω. πεσεῖται δὴ αὐτοῦ, ἁ μὲν εἰς τὰ προαγούμενα περιφέρεια ἐντὸς τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ εἰς τὰ ἑπόμενα ἐκτός. γεγράφθω δὴ ἁ περιφέρεια, καὶ συμπεσεῖται τᾷ ἴσᾳ καθ' ὃ συμπίπτει τᾷ θ̄α κατὰ τὸ ο̄, α̅, ὃ μ. καὶ τᾷ μετὰ τὰν θ̄κ εὐθείᾳ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσα. πάλιν δὴ καὶ καθ' ὃ τέμνει τὰν ἕλικα σημεῖον ἁ θ̄μ, ἔστω τὸ ν̄. καὶ κέντρῳ τῷ θ̄, διαστήματι δὲ τῷ θ̄ν κύκλος γεγράφθω. κα

γράφθω. ἔσται καὶ συμπίπτουσα ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου, καὶ τὰ μετὰ τὰν θμ ποτιπίπτουσα ποτὶ τὰν ἕλικα. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν ἄλλων πάντων κατατέμνοντι τὰν ἕλικα, αἵ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι κύκλοι γεγράφθωσαν κέντρῳ τῷ θ, ὧν τὰν συμπίπτουσαν ἑκάστας ἁ περιφέρεια τᾶς προαγομένας εὐθείας, καὶ τᾶς ἑπομένας. ἔσται δὴ περὶ τὸ λαφθὲν χωρίον περιγεγραμμένον σχῆμα ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστιν, ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος χωρίου δειχθήσεται. ἐστὶ γὰρ ὁ μὲν θλ ὁ τομεὺς ἴσος τῷ θμλ. ὁ δὲ θν ο τῷ θνρ. ὁ δὲ θχσ τῷ θχτ. ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἴσος τῷ κοινὰν ἔχοντι πλευρὰν τομεῖ, τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τομέων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τομεῖς πάντεσσιν ἴσοι ἐσσοῦνται. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ τῷ



περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ χωρίον σχήματι, χωρὶς τοῦ θακ τομέως. μόνος γὰρ οὗτος λέλειπται τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστι τῷ ακθ τομεῖ, ὅς ἐλάσσων ἐστὶν τοῦ προτεθέντος.

Ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράφειν. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον εἶναι τοῦ χωρίου ἐλάσσονι ἢ μὲν παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν ἐγγράφειν, ὥστε τὸ χωρίον ὁμοίως μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κβ Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι δευτέρα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ τὸ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδε, ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ αθ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἁ δὲ εα ἁ δευτέρα εὐθεῖα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ αζηι κύκλος ἔστω δεύτερος, καὶ αἱ γη, ζι διάμετροι αὐτοῦ ποτὶ ὀρθὰς ἀλλάλαις. πάλιν οὖν δίχα τεμνομένας τᾶς ὀρθᾶς γωνίας, καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν



περιέχοντος, ἰσοῦται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ θκα τομεύς,

τμεὺς, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρεθεισᾶν δὴ τᾶν ὀρθᾶν γωνίαν εἰς τὰς ἴσας γωνίας, τὰ ὑπὸ τᾶν κ θ α καὶ τᾶν ἄλλων κατασκευασθέντων ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, ἐσσεῖται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος μεῖζον ἐλάσσονι, ἢ ὁ τομεὺς ὁ θ κ α. μείζων γὰρ ἐσσεῖται ἁ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει ὁ θ κ α τομεὺς τοῦ θ ε ρ. δῆλον οὖν ὅτι δυνατόν ἐστι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ λαφθέντος χωρίου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερόν, διότι δυνατὸν λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγομένας περιγράψαι σχῆμα, οἷον εἴρηται ἐπίπεδον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥστε τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

ΛΑβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γε- κγ
γραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τὰν εὐθεῖαν τὰν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἕλικος ἀγομέναν, δυνατόν ἐστι περὶ τὸ χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐκ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ ε, πέρατα δὲ αὐτᾶς τὰ α ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ, θ ε. γεγράφθω δὴ κύκλος, κέντρον μὲν τὸ θ, διάστημα δὲ τὸ θ α. καὶ συμπιπτέτω ἁ θ ε ἐπὶ τὸ ζ. ἀεὶ δὴ τᾶς γωνίας τᾶς ποτὶ τῷ θ καὶ τοῦ τομέως τοῦ θ α δίχα τεμνομένων ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ προτεθέντος ἔλασσον. ἔστω ἐλάσσων ὁ τομεὺς ὁ θ α κ τοῦ προτεθέντος. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν σημείων καθ᾽ ἃ τέμνοντι τὰν ἕλικα αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτὶ τῷ θ, ὥστε τὰν περιφέρειαν ἑκάστα συμπίπτειν τᾷ τε προαγομένᾳ καὶ τᾷ ἑπομένᾳ. ἐσσεῖται δὴ περὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν περιγεγραμμένον σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἐλάσσων γάρ ἐστιν ὁ θ α κ τομεύς. ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον ἐπίπεδον, οἷον εἴρηται, περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.



ΤΟ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς κδ
εὐθείας τᾶς πρώτας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ θ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα πρώτα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ α κ ζ η ι κύκλος πρῶτος, οὗ τρίτον μέρος ἔστω ἐν ᾧ ς κύκλος. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ προειρημένον χωρίον τῷ ς κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἔλασσον. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ὁ ς κύκλος τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ α κ, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε ο. δῆλον οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ς κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ εὐθεῖαι πρὸς τὸ θ, ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ἕως τοῦ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσεῖν. ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, ὧν ἐστι μείζων μὲν ἁ θ α, ἐλάσσων δὲ ἁ θ ε. καὶ ἐλαχίστα

ἴσα

ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφθαι ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ἐλάσσονές ἐντι, ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων, τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ αζηι κύκλῳ. οἱ δὲ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἴσοι τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ἐλάσσων ἄρα ὁ αζηι κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ἢ τριπλάσιος, τοῦ δὲ γ κύκλου τριπλάσιος. ἐλάσσων ἄρα ὁ γ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς αβγδεθ ἕλικος, καὶ τᾶς αθ, ἔλασσον τοῦ γ χωρίου.

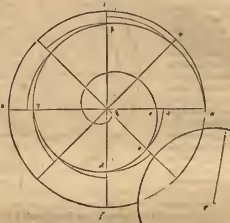


Οὐδὲ τοίνυν μεῖζον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἔστι δὴ πάλιν δυνατὸν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς αβγδθ ἕλικος, καὶ τᾶς αθ εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα. ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ γ κύκλου. ἐγγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θεξ, ἐλάχιστος δὲ ὁ θι. δῆλον οὖν, τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐστὶ τοῦ γ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφθονται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, μείζονές ἐντι ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ αζηι κύκλῳ, οἱ δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, ἴσοι τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. μείζων ἄρα ὁ αζηι κύκλος, ἢ τριπλάσιων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τοῦ δὲ γ κύκλου τριπλάσιων. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ γ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ μεῖζον τὸ χωρίον, τὸ ὑπό τε τᾶς αβγδεθ ἕλικος, καὶ τᾶς αθ εὐθείας, τοῦ γ κύκλου. ἴσον ἄρα ἐστὶ τῷ περιλαφθέντι ὑπὸ τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς αθ εὐθείας.

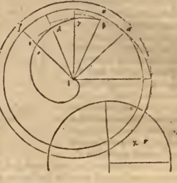


Χωρίον

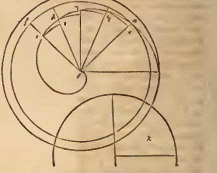
Χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κ ι δευτέρας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ ποτὶ τὰ ι β. ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα. τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β̄ κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ᾱ κύκλου. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β̄ κύκλου, τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ᾱ κύκλου, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β̄ κύκλου. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ̄ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ θ ε εὐθεῖα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ πρώτα, ἁ δὲ ᾱ ε ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ δευτέρα. ὁ δὲ κύκλος ὁ α ζ ῡ ι ὁ δεύτερος ἔστω. καὶ αἱ ᾱ κ, ι ζ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ̄ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς ᾱ ε εὐθείας ποτὶ τὸν α ζ κ̄ ι κύκλον, λόγον ἔχει, ὃν τὰ ἑπτὰ πρὸς ι β. ἔστω δή τις κύκλος ὁ ε̄, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ε̄ κύκλου δυνάμει ἴσα τῷ τε ὑπὸ ταῖν ᾱ θ, θ̄ ε περιεχομένῳ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ᾱ ε τετραγώνου. ἕξει δὴ ὁ ε̄ κύκλος πρὸς τὸν α κ̄ ζ ι, ὡς ἑπτὰ πρὸς ι β. διότι καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ πρὸς τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α ζ κ̄ ι κύκλου τοῦτον ἔχει δυνάμει τὸν λόγον. δειχθήσεται οὖν ἴσος ὁ ε̄ κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπό τε τᾶς α β γ̄ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς ᾱ ε εὐθείας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὲ πρότερον εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον γεγράφθαι σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον μὲν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ ε̄ κύκλος τοῦ χωρίου. περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ ᾱ κ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε̄ λ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι ποτὶ τὸ θ̄ ἴσας γωνίας ἔστ' ἂν ποτὶ ταὶν τοῦ δευτέρου κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. ἐντὶ δὴ τινὲς γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ̄ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσι, ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θ̄ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ̄ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ θ̄, ἐπὶ τὰν τοῦ α ζ κ̄ ι κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσους ἑαυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε ἴσαι καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ ταῖν ἴσαιν τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀπὸ ταῖν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τᾶς θ̄ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῖν ᾱ θ, θ̄ ε περιεχόμενον. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ᾱ ε τετραγώνου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ ταῖν ἴσαιν ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ α ζ κ̄ ι κύκλος, τοῖς δὲ τομεῦσι τοῖς ἀπὸ ταῖν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ᾱ θ ποτὶ τὰ συναμφότερα. τό τε ὑπὸ ταῖν ᾱ θ, θ̄ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ᾱ ε τετραγώνου. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ̄ α, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῖν θ̄ α, ᾱ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ᾱ ε τετραγώνου, τοῦτον ἔχει ὁ α ζ κ̄ ι κύκλος πρὸς τὸν ε̄ κύκλον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ α ζ κ̄ ι κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ε̄ κύκλον. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν



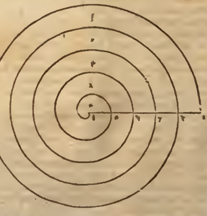
μεταξὺ τᾶν εἰρημέναν εὐθειᾶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἕλικι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων τῶν εἰρημέναν εὐθειᾶν τᾶς ἐλάσσονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀχθεισᾶν. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ ε, ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, πέρατα δὲ αὐτᾶς ἔστω τὰ α, ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ σαμεῖον. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ α κύκλος γεγράφθω, καὶ συμπιπτέτω τᾷ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἁ θ ε κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν α θ, θ ε ποτὶ τὸν τομέα τὸν α θ ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α. ἔστω δὴ κύκλος, ἐν ᾧ ὁ ς χ, τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσαν δυνάμει τῷ τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῷ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ δὲ τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἴσα τᾷ ποτὶ τῷ θ. ὁ δὴ τομεὺς ὁ ς χ ποτὶ τὸν τομέα τὸν θ α ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α τετράγωνον. αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυνάμει ποτ᾽ ἀλλάλας. δειχθήσεται δὴ ὁ χ ς τομεὺς ἴσος ὢν τῷ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων, ἢ ἐλάσσων. ἔστω γὰρ πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον περιγραφῆναι σχῆμα, ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ εἰρημένου χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ς χ τομεὺς τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μείζων μὲν ὁ θ κ κ, ἐλάσσων δὲ ὁ θ ο δ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ χ ς τομέως. διάχθωσαν δὴ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τὸ θ ἔστ᾽ ἂν ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ θ α ζ τομέως πεσόντι. ἐντὶ δή τινες εὐθεῖαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι. ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταύταν, τῷ μεγέθει ἴσαι ἀλλήλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ α θ ζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τᾶς θ ζ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ πασᾶν. ἀπό τε τᾶν ἴσων ἀλλήλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς θ ε οὐκ ἀναγέγραπται. τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας τομέως ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου. ἐστὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ θ α ζ τομεύς. τοῖς δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τὸ περιγεγραμμένον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θ α, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ζ ε. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ εἰρημένα, τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸν χ ς τομέα. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ὁ χ ς τομεὺς τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἐστὶν δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ χ ς τομεὺς μείζων τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν.



οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γὰρ ἐλάσσων, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. πάλιν δὴ δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ χ τομέως. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θβα, ἐλάσσων δὲ ὁ θε. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ χ τομέως. πάλιν οὖν ἐπεί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ θαζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, χωρὶς τᾶς θα, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τῷ δὲ μεγέθει, ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσαι. καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ τᾶς ἑκάστας ὅμοιοι τομεῖς. ἀπὸ δὲ τᾶν μεγίσταν τῶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οὐκ ἀναγέγραπται. οἱ τομεῖς οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας, τοὺς ἀπὸ τᾶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θα, θε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς εζ. ὥστε καὶ ὁ θαζ τομεὺς ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν χ τομέα. ὥστε μείζων ὁ χ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἔστιν οὖν ἐλάσσων ὁ χ τομεὺς τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶν αθ, θε εὐθειᾶν. ἴσα ἄρα.



κζ Τῶν χωρίων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τᾶν ἑλίκων καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἐν τᾷ περιφορᾷ, τὸ μὲν γ τοῦ β διπλάσιόν ἐστι, τὸ δὲ δ τριπλάσιον, τὸ δὲ ε τετραπλάσιον. καὶ ἀεὶ τὸ ἑπόμενον κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου χωρίου, τὸ δὲ α χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ δευτέρου. ἔστω ἁ προκειμένα ἕλιξ ἔν τε τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἐν τᾷ δευτέρᾳ, καὶ ἐν ταῖς ἑπομέναις ὁποσαισοῦν. ἔστω ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σαμεῖον, ἁ δὲ θε εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. τῶν δὲ χωρίων ἔστω τὸ μὲν κ τὸ α, τὸ δὲ λ τὸ β, τὸ δὲ μ τὸ γ, τὸ δὲ ν τὸ δ, τὸ δὲ ξ τὸ ε. δεικτέον ὅτι τὸ μὲν κ χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ ἑπομένου. τὸ δὲ μ διπλάσιον τοῦ λ, τὸ δὲ ν τριπλάσιον τοῦ λ, καὶ τῶν ἑξῆς ἀεὶ τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιον τοῦ λ, κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς. ὅτι μὲν οὖν τὸ κ ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ λ, ὧδε δείκνυται. ἐπεὶ δὲ



τὸ κλ χωρίον ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον δέδεικται τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ πρὸς τὰ

ιβ. ὁ δὲ β κύκλος ποτὶ τὸν α κύκλον, ὡς ι β ποτὶ τὰ τρία. δῆλον γάρ ἐστιν. ὁ δὲ α κύκλος ποτὶ τὸ κ χωρίον ἔχει ὡς γ πρὸς α. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ κ χωρίον τῷ λ. πάλιν δὲ ἐπεὶ τὸ κ λ μ χωρίον ποτὶ τὸν γ κύκλον, δέδεικται ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ γ θ, β, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ β τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ γ θ τετράγωνον. ὁ δὲ γ κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν β κύκλον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς γ θ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ β. ὁ δὲ β κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ κ λ χωρίον, ὃν τὸ ἀπὸ β θ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταν β θ, θ α, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α β τετραγώνου. ταῦτα δὲ ἔχει λόγον πρὸς ἄλλαλα, ὃν ι θ ποτὶ τὰ ζ. ὥς τε καὶ τὸ κ λ μ χωρίον ποτὶ τὸ λ κ χωρίον τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ι θ ποτὶ τὰ ζ. αὐτὸ οὖν τὸ μ ποτὶ τὸ κ λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ι β ποτὶ τὸ ζ. τὸ δὲ κ λ ποτὶ τὸ λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ ποτὶ τὰ ε. δῆλον οὖν ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ μ τοῦ λ. ὅτι δὲ τὰ ἑπόμενα τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει, δειχθήσεται. τὸ γὰρ κ λ μ ν ξ, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν ε θ, θ δ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ ε τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ ε τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θ ε, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θ δ, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ ε τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ δ τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἁ δ θ, ποτὶ τὸ κ λ μ ν χωρίον, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ δ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταν θ δ, θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ γ τετραγώνου. καὶ τὸ κ λ μ ν ξ ἄρα, ποτὶ τὸ κ λ μ ν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θ ε, θ δ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ ε, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ θ, θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ γ. διελόντι, καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ κ λ μ ν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχὰ, τοῦ τε ὑπὸ ε θ, θ δ μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τᾶς ε δ, πρός τε τὸ ὑπὸ τῶν δ θ, θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ γ. ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφότερα τοῦ συναμφοτέρου, ᾧ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ε θ δ, τοῦ ὑπὸ τῶν δ θ γ. ὑπερέχει δὲ τῷ ὑπὸ τῶν δ θ, γ ε. τὸ ξ ἄρα ποτὶ τὸ κ λ μ ν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θ δ, γ ε ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ θ, θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ δ τετραγώνου. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ κ λ μ χωρίον, λόγον ἔχον τὸν αὐτὸν, ὃν τὸ ὑπὸ ταν θ γ, β δ ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ γ θ β, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ γ β τετραγώνου. τὸ ν ἄρα ποτὶ τὸ κ λ μ ν χωρίον, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ θ γ, β δ ποτὶ τὸ ὑπὸ θ γ, θ β. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ β. καὶ ἀνάπαλιν. ταῦτα δὲ ἴσα ἐντὶ τῷ τε ὑπὸ ταν δ θ, θ γ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς γ δ τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ξ χωρίον πρὸς τὸ κ λ μ ν τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ταν θ δ, γ ε ποτὶ τὰ συναμφότερα, τῷ τε ὑπὸ ταν δ θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ δ τετραγώνου, τὰ δὲ κ λ μ ν ποτὶ τὸ ν ὄντα συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταν δ θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ δ τετραγώνου ποτὶ τὰ ὑπὸ τὰ θ γ, δ β. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ταν θ δ, γ ε, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταν θ γ, δ β. τὸ δὲ ὑπὸ ταν θ δ, γ ε ποτὶ τὸ ὑπὸ ταν θ γ, δ β, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θ δ ποτὶ ταν θ γ. ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ γ ε, β δ. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ θ δ ποτὶ ταν θ γ.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ μ τὸν αὐτὸν ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ θ γ ποτὶ ταν θ β. καὶ τὸ μ ποτὶ τὸ λ, ὃν ἁ β θ ποτὶ τὰν α θ. αἱ δὲ ε θ, δ θ, γ θ, β θ, α θ εὐθεῖαι, τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.

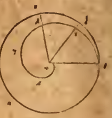
Εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέντα, μὴ τὰ πέρατα, ἀπὸ δὲ τῶν λαφθέντων σημείων ἐπιζευχθέωσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήμασι δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν σημείων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος κύκλοι γραφέωντι, τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς μείζονος ταν περιφερειᾶν τᾶς μεταξὺ ταν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς ἕλικος τᾶς μεταξὺ ταν αὐταν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας, τὸν αὐτὸν ἕξει τὸν λόγον ποτὶ τὸ ἀπολαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἐλάσσονος περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν, ὃν ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονος κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς αὐτᾶς ὑπεροχᾶς. κα

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ λελάφθω ἐπ' αὐτᾶς δύο σημεῖα τὰ α, γ, ὥς τε τὸ θ σημεῖον ἀρχὰν εἶμεν τᾶς ἕλικος. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ, ἐπιζευχθέωσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ θ, καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήμασι δὲ τοῖς θ α, θ γ, κύκλοι γεγράφθωσαν. δεικτέον ὅτι τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ θ α, καὶ δύο τριταμόρια τᾶς υ α, ποτὶ συναμφότερον τάν τε θ α, καὶ ἓν τριταμόριον τᾶς υ α, τὸ γὰρ χωρίον τὸ υ π ποτὶ τὸν κ γ θ τομέα, δέ-

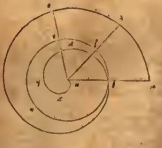
δεικται

τος δὴ τᾶς ἕλικος. ὑπόκειται δὲ ἐπιψαύουσα, καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅπτεται ἁ ε τᾶς ἕλικος.

ιδ Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ποτιπίπτωντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὰν τοῦ πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, αἱ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος, καὶ τῶν περάτων τᾶν ἐκβληθεισᾶν εὐθειᾶν τῶν ἐπὶ τᾶς περιφερείας γινομένων, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομέναν τᾶν περιφερειᾶν, ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος. ἔστω ἕλιξ ἁ αβγδεθ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἕλικος ἔστω τὸ α σαμεῖον. ἁ δὲ θα εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω καὶ κύκλος ὁ θκη. ἔστω ὁ πρῶτος. ποτιπιπτόντων δὲ ἀπὸ τοῦ α σαμείου ποτὶ τὰν ἕλικα, αἱ αε, αδ. καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐπὶ τὰ ζ, η. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ αε ποτὶ τὰν αδ, ὃν ἁ θκζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θκη περιφέρειαν. περιαγομένας γὰρ τᾶς αθ γραμμᾶς, δῆλον ὡς τὸ μὲν θ σαμεῖον κατὰ τᾶς θκη κύκλου περιφερείας ἐνεχθησόμενον δ' ἐστὶν ἰσοταχέως. τὸ δὲ α κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν αθ γραμμὰν πεπορεύεται. καὶ τὸ θ σαμεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, τὰν θκζ περιφέρειαν. τὸ δὲ α τὰν αε εὐθεῖαν. καὶ πάλιν τό τε α σαμεῖον τὰν αδ γραμμάν. καὶ τὸ θ τὰν θκη περιφέρειαν, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ αε ποτὶ τὰν αδ, ὃν ἁ θκζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θκη περιφέρειαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς πρώτοις. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ εἴκα ἁ ἑτέρα τᾶν ποτιπιπτουσᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ποτιπίπτῃ, τὸ αὐτὸ συμβαίνει.

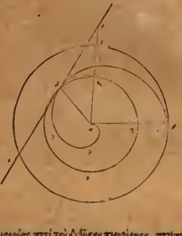


ιε Εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομένας. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδθ, ἁ μὲν αβγδθ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θλεμ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ποτιπιπτόντων εὐθεῖαι αἱ αε, αλ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ αλ ποτὶ τὰν αε, ὃν ἁ θκζ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, πρὸς θκη μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐν ὅσῳ γὰρ χρόνῳ τὸ α σαμεῖον κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν αλ γραμμὰν διαπορεύεται, καὶ τὸ θ σαμεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν θκζ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ πάλιν τὸ α σαμεῖον τὰν αε εὐθεῖαν κατὰ τὸ ε, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν θκη, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ αὑτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ αλ γραμμὰ ποτὶ τὰν αε, ὃν ἁ θκζ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν θκη περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τρίτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι, τὸν αὐτὸν λόγον ἑξοῦντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας δὶς λαμβανομένας. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ποτὶ τὰς ἄλλας ἕλικας ποτιπίπτουσαι δειχθησοῦνται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν ἁ εἰρημένα περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαύτας λαμβανομένας, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς τᾶν περιφορᾶν, καὶ εἴκα ἁ ποτιπίπτουσα ἑκατέρα ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος πίπτῃ.



Εἴκα

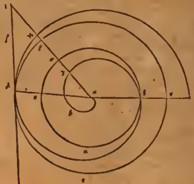
ις Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σαμεῖον, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἃς ποιεῖ γωνίας ἁ ἐφαπτομένα ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἄνισοι ἐσσοῦνται, καὶ ἁ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἁ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖα. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς τὰ α β γ δ θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν α σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ α θ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ πρῶτος κύκλος, ὁ θ κ η. ἐπιψαυέτω δέ τις εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δ ε ζ κατὰ τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἁ δ α. δεικτέον ὅτι ἁ δ ζ ποτὶ τὰν α δ ἀμβλεῖαν ποιεῖ γωνίαν. γεγράφθω κύκλος ὁ δ τ ν, κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ α δ. ἀναγκαῖον δὴ τούτου τοῦ κύκλου τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις περιφέρειαν ἐντὸς πίπτειν τᾶς ἕλικος, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός, διὰ τὸ τὰν ἀπὸ τοῦ α ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτουσᾶν εὐθειᾶν. τὰς μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις μείζονας εἶμεν τᾶς α δ, τὰς δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐλάσσονας. ὅτι μὲν οὖν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν α δ ζ, οὐκ ἔστιν ὀξεῖα, δῆλον. ἐπειδὴ μείζων ἐστὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου. ὅτι δὲ ὀρθὰ οὐκ ἐστί, δεικτέον οὕτως. ἔστω γὰρ δυνατὸν ὀρθά. ἡ ἄρα ε δ ζ ἐπιψαύει τοῦ δ τ ν κύκλου. δυνατὸν δή ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν, ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς ποτιπιπτούσας περιφερείας, ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν.



ποτιπιπτέτω δὴ ἁ α ι. τέμνει δὴ αὐτὰ τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ λ. τὰν δὲ τοῦ δ ν τ περιφέρειαν κύκλου κατὰ τὸ ρ. καὶ ἐχέτω ἁ ρ ι εὐθεῖα ποτὶ τὰν α ρ ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρ δ ν τ περιφέρεια ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν. τουτέστιν, ὃν ἔχει ἁ σ η κ θ περιφέρεια ποτὶ τὰν η κ θ περιφέρειαν. ὃν δὲ ἁ σ η κ θ περιφέρεια ποτὶ τὰν η κ θ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ α λ εὐθεῖα ποτὶ τὰν α δ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ α ι ποτὶ τὰν α ρ, ἤπερ ἁ λ α ποτὶ τὰν α δ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσα γὰρ ἁ ρ α τᾷ α δ. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὰ ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν α δ ζ. δέδεικται δέ, ὅτι οὐδὲ ὀξεῖα. ἀμβλεῖα ἄρα ἐστίν. ὥστε ἁ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστίν. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ, τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

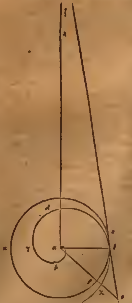
Καὶ τοίνυν εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ ἁ εὐθεῖα, τὸ αὐτὸ συμβήσεται. ιζ ἐπιψαυέτω γὰρ ἁ ε ζ εὐθεῖα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ δ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ὁμοίως δὴ τᾶς τοῦ ρ ν δ περιφερείας κύκλου, τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις τᾶς ἕλικος ἐντὸς πεσοῦνται, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός. ἁ οὖν γωνία, ἁ ὑπὸ τᾶν α δ ζ, οὐκ ἔστιν ὀρθά, ἀλλὰ ἀμβλεῖα. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ὀρθά. ἐπιψαύσει δὴ ἁ ε ζ τοῦ ρ ν δ κύκλου κατὰ τὸ δ. ἄχθω δὴ πάλιν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν ἁ α ι. καὶ τεμνέτω τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ χ, τὰν δὲ τοῦ ρ ν δ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ ρ. ἐχέτω δὲ ἁ ρ ι ποτὶ ρ α ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ ὅλαν τὰν τοῦ δ ρ ν κύκλου περιφέρειαν, καὶ ποτὶ τὰν δ ν τ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρ δ ν τ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἀλλ' ὃν λόγον ἔχει ἁ ρ δ ν τ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ δ ν τ ρ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ δ ν τ ρ κύκλου περιφερείας, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ σ η κ θ περιφέρεια, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τᾶς θ σ η κ, ποτὶ τὰν η κ θ περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ

θ σ η κ κύκλου περιφερείας. ὃν δὲ λόγον ἔχουσιν αἱ ὕστερον ἀρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χ α εὐθεῖα ποτὶ τὰν α δ εὐθεῖαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ, ἢ ἁ α χ ποτὶ τὰν α δ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴση μὲν γὰρ ἁ ρ α τᾷ α δ, μείζων δὲ ἁ ι α τᾶς α χ. δῆλον οὖν ὅτι ἀμβλεῖα ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ ταῦ α δ ζ. ὥστε ἡ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστί. τὰ δ᾽ αὐτὰ συμβήσονται, κἂν εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται, κἂν εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα. καὶ εἴκα ἐπὶ τὸ πέρας αὐτᾶς, ὅτι ἀνίσους ποιήσει τὰς γωνίας ποτὶ τὰν ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς, ἐπιζευχθεῖσαν ἐπὶ



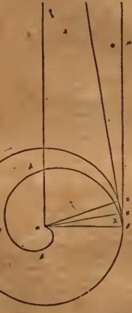
τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖαν, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις, ὀξεῖαν.

ιη Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἐν ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος ποτ᾽ ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ. καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας, καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ. ἔστω ἕλιξ ἁ α β γ δ. ἔστω δὲ τὸ α σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ θ η κ κύκλος ὁ πρῶτος. ἐπιψαυέτω δέ τις τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ θ, ἁ θ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ α ἄχθω πρὸς ὀρθὰς τᾷ θ α, ἁ α ζ. συμπεσεῖται δὴ αὐτᾷ ποτὶ τὰν θ ζ. ἐπεὶ αἱ ζ θ, θ α ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν. συμπιπτέτω κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζ α ἴσα ἐστὶ τᾷ τοῦ θ κ η κύκλου περιφερείᾳ. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι μείζων ἐστὶν, ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν, μείζων. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν τὰν λ α, τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζονα. ἐστὶ δὴ κύκλος τις ὁ θ η κ. καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ θ η. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς η θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμένην. διότι καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α ζ. δυνατὸν οὖν ἐστὶν, ἀπὸ τοῦ α ποτιλαβεῖν ποτὶ τὰν τὰν ἐκβεβλημέναν τὰν α ν. ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ν ρ, πρὸς θ ρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ θ α ποτὶ τὰν α λ. ἕξει οὖν ἁ ν ρ, ποτὶ τὰν ρ α λόγον, ὃν ἁ θ ρ εὐθεῖα ποτὶ τὰν α λ. ἁ δὲ θ ρ ποτὶ τὰν α λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ κ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θ ρ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς θ ρ περιφερείας. ἁ δὲ α λ εὐθεῖα τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζων. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει καὶ ἁ ν ρ πρὸς ρ α, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ὅλα οὖν ἁ ν α ποτὶ τὰν α ρ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ θ ρ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύ-



τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θκ κύκλου περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ θρ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ θκ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θκ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χα ποτὶ τὰν αθ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ να ποτὶ τὰν αρ, ἤπερ ἁ χα ποτὶ τὰν αθ, ὅπερ ἀδύνατον. ἁ μὲν γὰρ να μείζων ἐστὶ τᾶς αχ. ἁ δὲ αρ ἴσα ἐστὶ τᾷ θα. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζα τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ θκ.

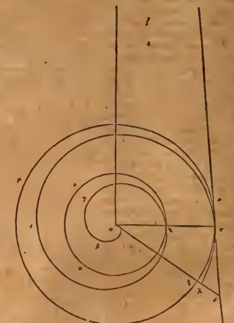
Ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατὸν, ἐλάσσων ἁ ζα τᾶς τοῦ θκ κύκλου περιφερείας. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν πάλιν τὰν αλ, τᾶς μὲν αζ μείζονα, τᾶς δὲ τοῦ θκ κύκλου περιφερείας ἐλάσσονα. καὶ ἄγω ἀπὸ τοῦ θ τὰν θμ παράλληλον τᾷ αζ. πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ θκ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐλάσσων γραμμὰ τᾶς διαμέτρου ἁ θκ. καὶ ἄλλα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ θ, καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ αθ ποτὶ ταν αλ, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς κθ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμένην. ἐπειδὴ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θα πρὸς αζ, ἐλάσσων ἐστί. δυνατὸν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ α ἀγαγεῖν τὰν απ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν. ὥστε τὰν ρν τὰν μεταξὺ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας, καὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὰν θπ, ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ θα ποτὶ τὰν αλ. τεμεῖ δὴ ἁ απ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἕξει καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν λόγον ἁ νρ πρὸς ρα, ὃν ἁ θπ πρὸς αλ. ἁ δὲ θπ ποτὶ τὰν αλ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θκ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θπ εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τᾶς θρ περιφερείας, ἁ δὲ αλ ἐλάσσων τᾶς τοῦ θκ κύκλου περιφερείας. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ νρ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ θρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θκ κύκλου περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ ρα ποτὶ τὰν αν μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τοῦ θνκ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θκρ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ τοῦ θκ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θκρ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ θα εὐθεῖα ποτὶ τὰν αχ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρα ποτὶ τὰν αν, ἢ ἁ αθ ποτὶ τὰν αχ. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν, οὐδὲ ἐλάσσων ἁ ζα τᾶς τοῦ θνκ κύκλου περιφερείας. ἴσα ἄρα.



Εἰ δὲ κατὰ τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύει εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ εὐθεῖα ἁ μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, διπλασία τᾶς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφερείας. ἔστω γὰρ ἁ μὲν αβγθ ἕλιξ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θετ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ὁ μὲν θκ κύκλος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τμν ὁ δεύτερος. ἔστω δέ τις γραμμὰ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ τ, ἁ τζ. ἁ δὲ ζα ποτ᾽ ὀρθὰς ἄχθω τᾷ τα. συμπεσεῖται δὲ τὰ αὐτὰ τᾷ τζ, διὰ τὸ δεδεῖχθαι τὰν γωνίαν ὀξεῖαν οὖσαν τὰν ὑπὸ τᾶν ατζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζα εὐθεῖα διπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. εἰ γὰρ μή ἐστι διπλασία, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία, ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων ἢ διπλασία. καὶ λελάφθω τις εὐθεῖα, ἁ λα τᾶς μὲν ζα εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ τοῦ τμν κύκλου περιφερείας μείζων ἢ διπλασία, ἔστι δή τις κύκλος ὁ τμν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γεγραμμένα ιθ

 ἐλάσσων

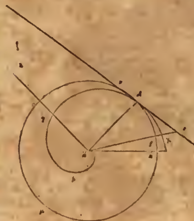
ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ τν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ τα ποτὶ ταν αλ, μείζονα τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς τν ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγομέναν. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν τὰν ασ, ποτὶ τὰν το ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ρσ ποτὶ τὰν τρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ τα ποτὶ τὰν αλ. τέμνει δὲ ἁ ασ τὰν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ρσ ποτὶ τὰν τα, ὃν ἁ τρ ποτὶ τὰν αλ, ἁ δὲ τρ ποτὶ τὰν αλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τοῦ μο κύκλου περιφέρειαν. ἐστὶ γὰρ ἁ μὲν τρ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς τρ περιφερείας. ἁ δὲ αλ εὐθεῖα μείζων ἢ διπλασία τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρσ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς τοῦ τμο κύκλου περιφερείας. ὅλα οὖν ἁ σα ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια μετὰ τᾶς τμο κύκλου περιφερείας δὶς εἰρημένας, ποτὶ τὰν τοῦ τμο κύκλου περιφέρειαν δὶς εἰρημέναν. ὃν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χα ποτὶ τὰν ατ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἁ ασ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ χα ποτὶ τὰν τα, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἁ ζα εὐθεῖα τᾶς τοῦ τμο κύκλου περιφερείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἢ διπλασία. δῆλον οὖν, ὅτι διπλασία ἐστί. διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικτέον. καὶ ἔκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθεῖσα τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς συμπίπτῃ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τᾶς περιφορᾶς λεγομένου τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ.



κ Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τᾶς ἀφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ ἐπιζευχθείσᾳ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθάς, τᾷ ἀπὸ τᾶς ἀφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθείσᾳ συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς τε συμπτώσιος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα τᾷ περιφερείᾳ τοῦ γραφέντος κύκλου τᾷ μεταξὺ τᾶς ἀφᾶς καὶ τᾶς τομᾶς, καθ' ὃ τέμνει ὁ γραφεὶς κύκλος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομένας τᾶς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σαμείου τοῦ ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδ ἐν τᾷ πρώτᾳ γεγραμμένα, καὶ ἐπιψαυέτω τις αὐτᾶς εὐθεῖα ἁ δε κατὰ τὸ δ. ἀπὸ δὲ τοῦ δ ποτὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζεύχθω ἁ αδ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ κύκλος γεγράφθω, ὁ δμν. τεμνέτω δὲ οὗτος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸ κ. ἄχθω δὲ ἁ ζα ποτὶ τὰν αδ ὀρθά. ὅτι μὲν οὖν αὐτᾷ συμπίπτει, δῆλον. ὅτι δὲ καὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζα εὐθεῖα τᾷ κμδ περιφερείᾳ, δεικτέον. ἁ γὰρ

μὰ

μὴ, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω εἰ δυνατὸν, πρότερον μείζων. λελάφθω δή τις ἁ Χ α τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ κ μ ν δ περιφερείας μείζων. πάλιν δὴ κύκλος ἐστὶν ὁ κ μ ν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ δ ν. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ δ α πρὸς α λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμισέα τᾶς δ ν, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμέναν. δυνατὸν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν τὰν α ε ποτὶ τὰν ν δ ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν ε ρ ποτὶ τὰν δ ρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν α λ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. ἕξει οὖν καὶ ἁ ε ρ ποτὶ τὰν α ρ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δ ρ ποτὶ τὰν α λ. ἁ δὲ α ρ ποτὶ τὰν α λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κ μ δ περιφέρειαν. ἐπεὶ ἁ μὲν δ ρ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς δ ρ περιφερείας, ἁ δὲ α λ μείζων τᾶς κ μ δ περιφερείας. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ἁ ε ρ εὐθεῖα πρὸς ρ α, καὶ ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κ μ δ περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ α ε πρὸς α ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ κ μ ρ περιφέρεια πρὸς κ μ δ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ κ μ ν πρὸς τὰν κ μ δ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χ α πρὸς α δ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ ε α πρὸς α ρ, ἢ ἁ α χ πρὸς δ α. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζ α τᾶς κ μ δ περιφερείας. ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστίν. ἴσα ἄρα. διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθῇ, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν συμπιπτούσας, ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐστὶν ὅλᾳ τᾷ τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείᾳ, καὶ ἔτι τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὡσαύτως τᾶς περιφερείας λαμβανομένας. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν γεγραμμένας περιφορᾷ ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος. τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τῶν εἰρημένων σαμείων πολλαπλασία τίς ἐστι τᾶς τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείας, κατὰ τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν τοῦ καθ᾽ ὃν αἱ περιφοραὶ λέγονται, καὶ ἔτι ἴσα τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὁμοίως λαμβανομένας.



Λαμβάνοντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σαμεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ θ α. ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ ζ η ι α. τὲ δὲ α η, ζ ι διάμετροι αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλάλαις, ἀεὶ δὴ τᾶς ὀρθᾶς γωνίας δίχα τεμνομένας καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ τομέως ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ τομεὺς ὁ α θ κ ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρήσθωσαν δὴ αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας τᾶς περιεχομένας ὑπὸ τᾶν α θ, θ κ. καὶ αἱ ποιοῦσαι τὰς γωνίας εὐθεῖαι ἔστων ἐπὶ τὰν ἕλικα ἀχθῶσι. καθ᾽ ὃ δὴ τέμνει σαμεῖον ἁ θ κ τὰν ἕλικα, ἔστω τὸ λ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ λ κύκλος γεγράφθω. πεσεῖται δὴ αὐτοῦ, ἁ μὲν εἰς τὰ προαγούμενα περιφέρεια ἐντὸς τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ εἰς τὰ ἑπόμενα ἐκτός. γεγράφθω δὴ ἁ περιφέρεια, καὶ συμπεσεῖται τᾷ ἴσᾳ καθ᾽ ὃ συμπίπτει τᾷ θ α κατὰ τὸ ο, α, ο μ. καὶ τᾷ μετὰ τὰν θ κ εὐθείᾳ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσᾳ. πάλιν δὴ καθ᾽ ὃ τέμνει τὰν ἕλικα σαμεῖον ἁ θ μ, ἔστω τὸ ν. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ ν κύκλος γεγράφθω.

γράφθω. ἴσαι καὶ συμπίπτῃ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου, καὶ τὰ μετὰ τὰν θμ ποτιπίπτουσα ποτὶ τὰν ἕλικα. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν ἄλλων πάντων κατατέμνοντι τὰν ἕλικα, αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι κύκλοι γεγράφθωσαν κέντρῳ τῷ θ, ὧν τ' ἂν συμπίπτῃ ἑκάστας ἁ περιφέρεια τᾶτε προαγομένας εὐθείας, καὶ τᾶ ἑπομένα. ἔσται δὴ περὶ τὸ λαφθὲν χωρίον περιγεγραμμένον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστιν, ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος χωρίου δειχθήσεται. ἐστὶ γὰρ ὁ μὲν θλ ὁ τομεὺς ἴσος τῷ θμλ. ὁ δὲ θνπ τῷ θνρ. ὁ δὲ θχσ τῷ θχτ. ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἴσος τῷ κοινὰν ἔχοντι πλευρὰν τομεῖ, τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τομέων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τομεῖς πάντεσσιν ἴσοι ἐσσοῦνται. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ τῷ



περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ χωρίον σχήματι, χωρὶς τοῦ θακ τομέος. μόνος γὰρ οὗτος λέλειπται τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστι τῷ ακθ τομεῖ, ὅς ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ προτεθέντος.

Ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράφειν. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον εἶναι τοῦ χωρίου ἐλάσσονι ἤμεν παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν ἐγγράφειν, ὥστε τὸ χωρίον ὁμοίως μεῖζον ἤμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κβ Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι δευτέρα τῶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ τὸ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον ἤμεν, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδε, ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ αθ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἁ δὲ εα ἁ δευτέρα εὐθεῖα τῶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ αζη κύκλος ἔστω δεύτερος, καὶ αἱ γε, ζι διάμετροι αὐτοῦ ποτ' ὀρθὰς ἀλλήλαις. πάλιν οὖν δίχα τεμνομένας τᾶς ὀρθᾶς γωνίας, καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν



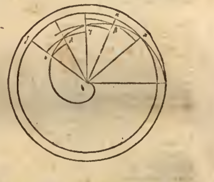
περιέχοντος, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ θκα

τομεύς,

τμαὺς, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρεθείσαν δὴ τὰν ὀρθὰν γωνίαν εἰς τὰς ἴσας γωνίας, τὰ ὑπὸ τῶν κ θ α καὶ τῶν ἄλλων κατασκευασθέντων ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, ἐσσεῖται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος μεῖζον ἐλάσσονι, ἢ ὁ τομεὺς ὁ θ κ α. μείζων γάρ ἐσσεῖται ἁ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει ὁ θ κ α τομεὺς τοῦ θ ε ρ. δῆλον οὖν ὅτι δυνατόν ἐστι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ λαφθέντος χωρίου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερὸν, διότι δυνατὸν λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγομένας περιγράψαι σχῆμα, οἷον εἴρηται ἐπίπεδον. ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥς τε τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἕλικος ἀγομένων, δυνατόν ἐστιν περὶ τὸ χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐκ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ ε, πέρατα δὲ αὐτᾶς τὰ α ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ, θ ε. γεγράφθω δὴ κύκλος, κέντρον μὲν τὸ θ, διάστημα δὲ τὸ θ α. καὶ συμπιπτέτω τὰ θ ε ἐπὶ τὸ ζ. ἀεὶ δὲ τᾶς γωνίας τᾶς ποτὶ τὸ θ καὶ τοῦ τομέως τοῦ θ α δίχα τεμνομένων ἔσται τὸ καταλειπόμενον τοῦ προτεθέντος ἔλασσον. ἔστω ἐλάσσων ὁ τομεὺς ὁ θ α κ προτεθέντος. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν σημείων καταμέσων τᾶς ἕλικα αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτὶ τὰ θ. ὥς τε τὰν περιφέρειαν ἑκάστα συμπίπτειν τᾷ τε προαγομένᾳ καὶ τᾷ ἑπομένᾳ. ἐσσεῖται δὴ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν περιγεγραμμένον σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἐλάσσων γάρ ἐστιν ὁ θ α κ τομεύς. ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον ἐπίπεδον, οἷον εἴρηται, περιγράψαι, ὡς τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

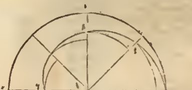


Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ θ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα πρώτα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ α κ ζ η ι κύκλος πρῶτος, οὗ τρίτον μέρος ἔστω ἐν ᾧ ε κύκλος. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ προειρημένον χωρίον τῷ ε κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἔλασσον. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων. ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ὁ ε κύκλος τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ α κ, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε ο. δῆλον οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ εὐθεῖαι πρὸς τὸ θ, ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ἐν τῷ αὐ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσοῦσαι. ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ὧν ἐστι μεῖζον μὲν ἁ θ α, ἐλάσσων δὲ ἁ θ ι. καὶ ἐλαχίστα

ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφθαι ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ἐλάσσονές ἐντι, ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων, τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ α ζ η ι κύκλῳ. οἱ δὲ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἴσοι τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ἐλάσσων ἄρα ὁ α ζ η ι κ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ἢ τριπλασίων, τοῦ δὲ ξ κύκλου τριπλασίων. ἐλάσσων ἄρα ὁ ξ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ, ἔλασσον τοῦ ξ χωρίου.

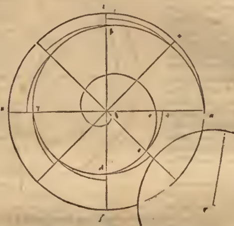


Οὐδὲ τοίνυν μεῖζον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐστὶ δὴ πάλιν δυνατὸν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς α β γ δ θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ξ κύκλου. ἐγγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ ρ ξ, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε. δῆλον οὖν, τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐστὶ τοῦ ξ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τὸ θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφονται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, μείζονες ἐντὶ ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ α ζ η ι κύκλῳ, οἱ δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, ἴσοι τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. μείζων ἄρα ὁ α ζ η ι κύκλος, ἢ τριπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τοῦ δὲ ξ κύκλου τριπλασίων. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ξ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἐστὶ δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ μεῖζον τὸ χωρίον, τὸ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ, ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας, τοῦ ξ κύκλου. ἴσον ἄρα ἐστὶ τῷ περιλαφθέντι ὑπὸ τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας.



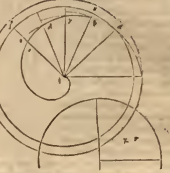
Χωρίον

Χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κατὰ δευτέρας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ ποτὶ τὰ ιβ. ὃς δή ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα. τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ θε εὐθεῖα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ πρώτα, ἁ δὲ αε ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ δευτέρα. ὁ δὲ κύκλος ὁ αζηι ὁ δεύτερος ἔστω. καὶ αἱ αη, ιζ διάμετροι ποτ᾽ ὀρθὰς ἀλλήλαις. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶς αε εὐθείας ποτὶ τὸν αζηι κύκλον, λόγον ἔχει, ὃν τὰ ἑπτὰ ποτὶ ιβ. ἔστω δή τις κύκλος ὁ ς, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ς κύκλου δυνάμει ἴσα τῷ τε ὑπὸ ταῖν αθ, θε περιεχομένῳ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου. ἕξει δὴ ὁ ς κύκλος ποτὶ τὸν αηζι, ὡς ἑπτὰ ποτὶ ιβ. διότι καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αζηι κύκλου



τοῦτον ἔχει δυνάμει τὸν λόγον. δειχθήσεται οὖν ἴσος ὁ ς κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶς αε εὐθείας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὲ πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον γεγράφθαι σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ ς κύκλος τοῦ χωρίου. περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θακ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θελ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι ποτὶ τὸ θ ἴσας γωνίας ἔστε ποτὶ τὰν τοῦ δευτέρου κύκλου περιφέρειαν πιπτόντι. ἐντὶ δὴ τινὲς γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσιν, ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ θ, ἄχρι τὰν τοῦ αζηι κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσων ἐουσαῖ, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε ἴσαι καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τᾶς θα ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῖν αθ, θε περιεχόμενον. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ αζη κύκλος, τοῖς δὲ τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς αθ ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῖν αθ, θε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῖν θα, αε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου, τοῦτον ἔχει ὁ αζη κύκλος πρὸς τὸν ς κύκλον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ αζηι κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ς κύκλον. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν

περὶ τᾶν εἰρημέναν εὐθειᾶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἕλικι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμένων. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων τῶν εἰρημένων εὐθειᾶν τᾶς ἐλάσσονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶς ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθεισᾶν. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ ε, ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, πέρατα δὲ αὐτᾶς ἔστω τὰ α, ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ σημεῖον. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ α κύκλος γεγράφθω, καὶ συμπιπτέτω τᾷ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἁ θ ε κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν α θ, θ ε, ποτὶ τὸν τομέα τὸν α θ ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α. ἔστω δὴ κύκλος, ἐν ᾧ ὁ χ, τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσαν δυνάμει τῷ τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῷ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ δὲ τὸ κέντρον αὐτοῦ γωνία ἴσα τᾷ ποτὶ τῷ θ. ὁ δὴ τομεὺς ὁ χ ποτὶ τὸν τομέα τὸν θ α ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α τετράγωνον. αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυνάμει ποτ' ἀλλάλας. δειχθήσεται δὴ ὁ χ τομεὺς ἴσος ὢν τῷ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων, ἢ ἐλάσσων. ἔστω γὰρ πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων. δυνατόν ἐστι δὴ περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον περιγράψαι σχῆμα, ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ εἰρημένου χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ χ τομεὺς τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μείζων μὲν ὁ θ α κ, ἐλάσσων δὲ ὁ θ ο δ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ χ τομέως. διάχθωσαν δὴ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τὸ θ ἕως τὰν ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ θ α ζ τομέως πεσῶντι. ἐντὶ δή τινες εὐθεῖαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι. ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταύταν, τῷ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, αἱ ἀπὸ τοῦ ποτὶ τὰν τοῦ α θ ζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τᾶς θ ζ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ πασᾶν. ἀπό τε τᾶν ἴσων ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς θ ε οὐκ ἀναγέγραπται. τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσων ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας τομέως ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου. ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσων ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ θ α ζ τομεύς. τοῖς δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τὸ περιγεγραμμένον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θ α, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ζ ε. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ εἰρημένα, τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸν χ τομέα. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ὁ χ τομεὺς τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἐστὶν δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐσσεῖται ὁ χ τομεὺς μείζων τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν.



ιβ. ὁ δὲ β κύκλος ποτὶ τὸν α κύκλον, ὡς ιβ ποτὶ τὰ τρία. δῆλον γὰρ δεῖ. ὁ δὲ α κύκλος ποτὶ τὸ κ χωρίον ἔχει ὡς γ πρὸς α. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ κ χωρίον τῷ λ. πάλιν δὲ ἐπεὶ τὸ κ λ μ χωρίον ποτὶ τὸν γ κύκλον, δέδεικται ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ γ θ, β, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ β τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ γ θ τετράγωνον. ὁ δὲ γ κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν β κύκλον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς γ θ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ β. ὁ δὲ β κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ κ λ χωρίον, ὃν τὸ ἀπὸ β θ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταν β θ, θ α, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α β τετραγώνου. ταῦτα δὲ ἔχει λόγον πρὸς ἄλλαλα, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. ὥστε καὶ τὸ κ λ μ χωρίον ποτὶ τὸ λ κ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. αὐτὸ οὖν τὸ μ ποτὶ τὸ κ λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ιβ ποτὶ τὸ ζ. τὸ δὲ κ λ ποτὶ τὸ λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ ποτὶ τὰ ε. δῆλον οὖν ὅτι διπλάσιον ἐστὶ τὸ μ τοῦ λ. ὅτι δὲ τὰ ἑπόμενα τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει, δειχθήσεται. τὸ γὰρ κ λ μ ν ξ, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν ε θ, θ δ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ ε τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ ε τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θ ε ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θ δ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ ε τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ δ τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστὶν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἁ δ θ, ποτὶ τὸ κ λ μ ν χωρίον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ δ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταν θ δ, θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ γ τετραγώνου. καὶ τὸ κ λ μ ν ξ ἄρα, ποτὶ τὸ κ λ μ ν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θ ε, θ δ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ ε, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ θ, θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ γ. διελόντι, καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ κ λ μ ν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχὴ, τοῦ τε ὑπὸ ε θ, θ δ μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τᾶς ε δ, πρός τε τὸ ὑπὸ τῶν δ θ, θ γ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ γ. ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφότερα τοῦ συναμφοτέρου, ᾧ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ε θ δ, τοῦ ὑπὸ τῶν δ θ γ. ὑπερέχει δὲ τῷ ὑπὸ τῶν δ θ, γ ε. τὸ ξ ἄρα ποτὶ τὸ κ λ μ ν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θ δ γ ε ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ θ, θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ δ τετραγώνου. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ κ λ μ χωρίον, λόγον ἔχον τοῦτον, ὃν τὸ ὑπὸ ταν θ γ, β δ ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ γ θ β, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ γ β τετραγώνου. τὸ ν ἄρα ποτὶ τὸ κ λ μ ν χωρίον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ θ γ, β δ ποτὶ τὸ ὑπὸ θ γ, θ β. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ β. καὶ ἀνάπαλιν. ταῦτα δὲ ἴσα ἐντὶ τῷ τε ὑπὸ ταν δ θ, θ γ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς γ δ τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ξ χωρίον πρὸς τὸ κ λ μ ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ταν θ δ, γ ε ποτὶ τὰ συναμφότερα, τῷ τε ὑπὸ ταν δ θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ δ τετραγώνου. τὰ δὲ κ λ μ ν ποτὶ τὸ ν ὄντα συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταν δ θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ δ τετραγώνου ποτὶ τὰ ὑπὸ τὰ θ γ, δ β. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ταν θ δ, γ ε, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταν θ γ, δ β. τὸ δὲ ὑπὸ ταν θ δ, γ ε ποτὶ τὸ ὑπὸ ταν θ γ, δ β, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θ δ ποτὶ ταν θ γ. ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ γ ε, β δ. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ θ δ ποτὶ ταν θ γ.

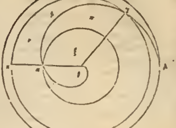
Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ μ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ θ γ ποτὶ ταν θ β. καὶ τὸ μ ποτὶ τὸ λ, ὃν ἁ β θ ποτὶ τὸν α θ. αἱ δὲ ε θ, δ θ, γ θ, β θ, α θ εὐθεῖαι, τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.

Εἴκα περὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέντα, μὴ τὰ πέρατα, ἀπὸ δὲ τῶν λαφθέντων σημείων ἐπιζευχθέωσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστάμασι δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν σαμείων ἐπὶ τὰ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος κύκλοι γραφέωντι, τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς μείζονος ταν περιφερειᾶν τᾶς μεταξὺ ταν εὐθειαν, καὶ τᾶς ἕλικος τᾶς μεταξὺ ταν αὐταν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον ποτὶ τὸ ἀπολαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἐλάσσονος περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν, ὃν ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου μετὰ δύο τριταμοριᾶν τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονος κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς αὐτᾶς ὑπεροχᾶς. κ̄

ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ λελάφθω ἐπ' αὐτᾶς δύο σημεῖα τὰ α, γ, ὥστε τὸ θ σημεῖον ἀρχὰν εἶμεν τᾶς ἕλικος. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ, ἐπεζεύχθωσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ θ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήμασι δὲ τοῖς θ α, θ γ, κύκλοι γεγράφθωσαν. δεικτέον ὅτι τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ θ α, καὶ δύο τριταμόρια τᾶς η α, ποτὶ συναμφότερον τάν τε θ α, καὶ ἓν τριταμόριον τᾶς η α, τὸ γὰρ χωρίον τὸ ν π ποτὶ τὸ ν κ γ θ ἴσον μία, δι-

δεικται

λεκτοῦ ἴσον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τό τε ὑπὸ ταῦ κθ, αθ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ακ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τετράγωνον, αὐτὸ ἄρα τὸ ξ ποτὶ τὸ νπ ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ταῦ θακ μετὰ δύο τριταμορίων τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῦ αθκ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. καὶ ἐπεὶ τὸ νπξ χωρίον ποτὶ τὸν νξ τομέα ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν θα, θκ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θκ τετράγωνον. ὁ δὲ νπξ τομεὺς ποτὶ τὸν ν τομέα ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θα ἕξει καὶ τὸ νπ χωρίον ποτὶ τὸν ν τομέα, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ θα, θκ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ τὸ ἀπὸ θα. τὸ ἄρα νπ χωρίον πρὸς τὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῦ κθα. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ ταῦ κα, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ νπ ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ θακ, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῦ κθα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. τὸ δὲ νπ χωρίον ποτὶ τὸ π ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ ταῦ κθα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ ταῦ καθ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου. ἕξει καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π, ἴσον τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ ταῦ θα, κα, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ ταῦ θα, κα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. τὰ δὲ συναμφότερα τό τε ὑπὸ ταῦ θα, κα, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερα τό τε ὑπὸ ταῦ θα, κα καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, ἅ τε θα καὶ δύο τριταμόρια τᾶς κα, ποτὶ συναμφοτέραν, τάν θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς κα. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ ν χωρίον ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα, ἅ τε θα καὶ δύο τριταμόρια τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερον τάν θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς κα.



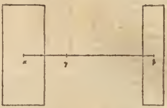
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ, Η ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βάρεα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπεῖν, τὰ δὲ ἴσα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. εἴκα βαρέων ἰσορροπεόντων ἀπὸ τινῶν μακέων ποτὶ τὸ ἕτερον τῶν βαρέων ποτιτεθῇ, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐκεῖνο ᾧ ποτετέθη. ὁμοίως δὲ καὶ εἴκα ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν βαρέων ἀφαιρεθῇ τι, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἀφ' οὗ οὐκ ἀφῃρέθη. τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλληλα. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐσσεῖται κείμενα. ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ ὅμοια σχήματα, ἀφ' ὧν ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ποιοῦντι γωνίας ἴσας ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς. εἴκα μεγέθεα ἀπὸ τινῶν μακέων ἰσορροπέωντι, καὶ τὰ ἴσα αὐτοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν μακέων ἰσορροπήσει. παντὸς σχήματος, οὗ ἁ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλα ἐστί, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τούτων δὲ ὑποκειμένων, τὰ ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπέοντα βάρεα ἴσα ἐστί. εἰ γὰρ ἄνισα ἐσσεῖται, ἀφαιρεθείσας ἀπὸ τοῦ μείζονος τᾶς ὑπεροχᾶς, τὰ λοιπὰ οὐκ ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφῄρηται. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων βάρεα ἰσορροπέοντα, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ

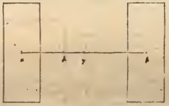
τῶν ἴσων

τῶν ἴσων μακέων ἄνισα βάρεα, οὐκ ἰσορροπησοῦντι. ἀλλὰ ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἀφαιρεθείσας τᾶς ὑπεροχᾶς ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπέοντι. ποτιτεθέντος οὖν τοῦ ἀφαιρεθέντος ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἐπεὶ ἰσορροπεόντων τῷ ἑτέρῳ ποτιτεθέν.

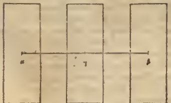
Τὰ ἄνισα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπησοῦντι, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος. ἔστω ἄνισα βάρεα τὰ α, β. καὶ ἔστω τὸ α, καὶ ἰσορροπέοντα ἀπὸ τῶν αγ, γβ μακέων. δεικτέον ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἁ αγ τᾶς γβ. μὴ γίνεται, ἔστω. ἀφαιρεθείσας δὲ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει τὸ α τοῦ β. ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφήρηται, ῥέψει ἐπὶ τὸ β. οὐ ῥέψει δέ. εἴτε γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ γα τᾶ γβ. ἰσορροπησοῦντι γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων. εἴτε μείζων ἁ γα τᾶς γβ, ῥέψει ἐπὶ τὸ α. τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι, ἀλλὰ ῥέπει ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. διὰ δὴ ταῦτα, ἐλάσσων ἐστὶν ἁ αγ τᾶς γβ. φανερὸν δέ, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπέοντα, ἄνισά ἐντι, καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος. α



Εἴκα δύο ἴσα μεγέθεα, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχοντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος. ἔστω τοῦ μὲν α κέντρον τοῦ βάρεος τὸ α, τοῦ δὲ β τὸ β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ αβ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ. λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐστὶ τὸ γ. εἰ γὰρ μή, ἔστω τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α, β μεγεθέων κέντρον τοῦ βάρεος τὸ δ, εἰ δυνατόν. ὅτι γὰρ ἐστὶν ἐπὶ τᾶς αβ, προδέδεικται. ἐπεὶ οὖν τὸ δ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ἐκ τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος, κατεχομένου τοῦ δ ἰσορροπήσει. τὰ ἄρα α, β μεγέθεα ἰσορροπέοντι ἀπὸ τῶν αδ, δβ μακέων, ὅπερ ἀδύνατον. τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι. δῆλον οὖν τὸ ὅτι γ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, τοῦ ἐκ τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος. β

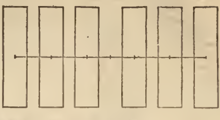


Εἴκα τριῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἐόντα κέηται, καὶ τὰ μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχοντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. ἔστω τρία μεγέθεα τὰ α, β, γ. κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος, τὰ α, β, γ, σαμεῖα ἐπ' εὐθείας κείμενα. ἔστω δὲ τὰ α, β, γ ἴσα. καὶ αἱ αγ, γβ ἴσαι εὐθεῖαι. λέγω ὅτι τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ γ σαμεῖον. ἐπεὶ γὰρ τὰ α, β μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχει, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον. ἐπειδὴ ἴσαι ἐντὶ αἱ αγ, γβ. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ γ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. γ

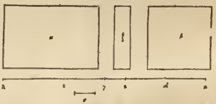


Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ὁπόσων καὶ τῷ πλήθει περισσῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἐόντι κείμενα, ἄκα τά τε ἴσον ἀπέχοντα, ἀπὸ τοῦ μέσου μεγέθεος

ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. εἴκα καὶ ἄρτια ἔωντι τῷ πλήθει τὰ μεγέθεα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μέσα αὐτῶν ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος, τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μεγεθέων, ὡς ὑπογέγραπται.

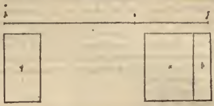


δ Τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέωντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότων τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσιν. ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ α, β, ὧν κέντρα τὰ α, β, καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ε δ, καὶ ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ δ γ μᾶκος πρὸς τὸ γ ε μᾶκος. δεικτέον ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α ποτὶ τὸ β, οὕτω τὸ δ γ ποτὶ τὸ γ ε. τὸ δὲ α τῷ β σύμμετρον, καὶ τὸ γ δ ἄρα τῷ γ ε σύμμετρον. τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ. ὥστε τῶν ε γ, γ δ ἐστὶ κοινὸν μέτρον. ἔστω δὴ τὸ ν, καὶ κείσθω τᾷ μὲν ε γ ἴσα ἑκατέρα τῶν δ η, δ κ. τᾷ δὲ δ γ ἴσα ἁ ε λ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἁ δ η τᾷ γ ε, ἴσα καὶ ἁ δ γ τᾷ ε η, ὥστε καὶ ἁ λ ε ἴσα τᾷ ε η. διπλασία ἄρα ἁ μὲν λ η τᾶς δ γ, ἁ δὲ η κ τᾶς γ ε. ὥστε τὸ ν καὶ ἑκατέραν τῶν λ η, η κ μετρεῖ. ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἡμίσεα αὐτῶν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ἁ δ γ πρὸς γ ε. ὡς δὲ ἁ δ γ πρὸς γ ε, οὕτως ἁ λ η πρὸς η κ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ἁ λ η πρὸς η κ. ὁσαπλασίων δέ ἐστιν ἁ λ η τᾶς ν, τοσαυταπλασίων ἔστω τὸ α τοῦ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ λ η πρὸς ν, οὕτως τὸ α πρὸς ζ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἁ κ η πρὸς λ η, οὕτως τὸ β πρὸς α. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ἁ κ η πρὸς ν, οὕτως τὸ β πρὸς ζ. ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ κ η τᾶς ν, καὶ τὸ β τοῦ ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ζ καὶ τὸ α πολλαπλασίων ὄν, ὥστε τὸ ζ τῶν α, β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν λ η εἰς τὰς τᾷ ν ἴσας, τοῦ δὲ α εἰς τὰ τῷ ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ λ η τμάματα ἰσομεγέθη τᾷ ν, ἴσα ἐστὶ τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ α τμάμασιν ἴσοις οὖσι τῷ ζ. ὥστε αἴ κα ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ λ η ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ ζ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ α. καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ ε. ἄρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, διὰ τὸ ἴσαν εἶμεν τὰν λ ε τᾷ η ε. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἴ κα ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐν τᾷ κ η τμαμάτων ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ ζ, κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐσσεῖται τῷ β, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται τὸ δ. ἀλλ' οὖν τὸ μὲν α ἐπικείμενον κατὰ τὸ ε, τὸ δὲ β κατὰ τὸ δ. ἔσται δὴ μεγέθεα ἴσα ἀλλήλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἴσα ἀπ' ἀλλήλων διεστακότα συγκείμενα, ἄρτια τῷ πλήθει. δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δὲ ἴσαι ἐντὶ ἁ μὲν λ ε τᾷ γ δ, ἁ δὲ ε γ τᾷ δ κ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ λ γ ἴσα τᾷ γ κ. ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα α κειμένου κατὰ τὸ ε, τοῦ δὲ β κατὰ τὸ δ, ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ γ.



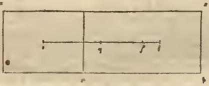
Καὶ

ς Καὶ τοίνυν ἄκα ἀσύμμετρα ἐοῦντι τὰ μεγέθεα, ὁμοίως ἰσορροπησοῦντι, ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς μεγέθεσιν. ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθεα τὰ αβ, γ, μάκεα δὲ τὰ δε, εζ. ἐχέτω δὲ τὸ αβ ποτὶ τὸ γ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὸ εδ ποτὶ τὸ εζ μᾶκος. λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν αβ, γ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε. εἰ γὰρ μὴ, ἰσορροπήσει τὸ αβ τεθὲν ἐπὶ τῷ ζ, τῷ γ τεθέντι ἐπὶ τὸ δ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν τῷ γ, ἢ οὔ. ἔστω μεῖζον. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ αβ ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν. ὥστε



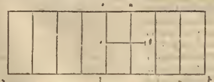
τὸ λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶν τῷ γ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρά ἐστι τὰ α, γ μεγέθεα, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ α ποτὶ τὸ γ, ἢ ἁ δε πρὸς εζ, οὐκ ἰσορροπησοῦντι τὰ α, γ ἀπὸ τῶν δε, εζ μακέων, τεθέντος τοῦ μὲν α ἐπὶ τὸ ζ, τοῦ δὲ γ ἐπὶ τὸ δ. διὰ ταῦτα δὲ οὐδ᾽ εἰ τὸ γ μεῖζόν ἐστιν, ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν τῷ α.

ς Εἴκα ἀπό τινος μεγέθεος μέγεθος ἀφαιρεθῇ, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τῷ ὅλῳ, τοῦ λοιποῦ μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐκβληθείσας τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τῶν βαρέων τοῦ τε ὅλου μεγέθεος καὶ τοῦ ἀφῃρημένου ἐπὶ τὰ αὐτὰ, ἐφ᾽ ὃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθεος. καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς ἀπὸ τᾶς ἐκβληθείσας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ εἰρημένα κέντρα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος πρὸς τὸ τοῦ λοιποῦ βάρος, τὸ πέρας τᾶς ἀπολαφθείσας. ἔστω μεγέθεος τινὸς τοῦ αβ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ αβ τὸ αδ. οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ ε. ἐπιζευχθείσας δὲ τᾶς εγ, καὶ ἐκβληθείσας, ἀπολελάφθω ἁ γζ ποτὶ τὰν γε, λόγον ἔχουσα τὸν αὐτὸν, ὃν ἔχει τὸ αδ μέγεθος ποτὶ τὸ δη. δεικτέον ὅτι τοῦ δη μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ζ σημεῖον. μὴ γὰρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ θ σημεῖον. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν αδ μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε, τοῦ δὲ δη τὸ θ σημεῖον, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν αδ, δη μεγεθέων, κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς εθ τμαθείσας, ὥστε τὰ



τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθότως ἔχειν τὸν αὐτὸν λόγον τοῖς μεγέθεσιν, ὥστε οὐκ ἔσται τὸ γ σαμεῖον κατὰ τὰν ἀνάλογον τομὰν τὰν εἰρημέναν. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ γ κέντρον τοῦ ἐκ τῶν αδ, δη συγκειμένου μεγέθεος, τουτέστι τοῦ αβ. ἐστὶ δέ. ὑπόκειται γάρ. οὐκ ἐστὶ ἄρα τὸ θ κέντρον βάρεος τοῦ δη μεγέθεος.

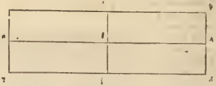
ζ Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τᾶς κατ᾽ ἐναντίον τοῦ παραλληλογράμμου πλευρᾶς. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ. ἐπὶ δὲ τὰν διχοτομίαν τῶν αβ, γδ ἁ εζ. φαμὶ δὴ ὅτι τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς εζ. μὴ γὰρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ θ. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν αβ ἁ θι. τᾶς δὲ δὴ εβ διχοτομουμένας αἰεὶ ἐσσεῖταί ποκα καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς ιθ. καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν αε, εβ ἐς τὰς τᾷ εκ ἴσας. καὶ ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσιας σαμείων ἄχθωσαν παρὰ τὰν εζ. διαιρεθήσεται δὴ τὸ ὅλον



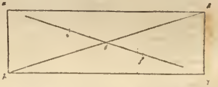
παραλληλόγραμμον ἐς παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα καὶ ὅμοια τῷ κζ. τῶν οὖν παραλληλογράμμων τῶν

ἴσων καὶ ὁμοίων τῷ κζ ἐφαρμοζομένων ἐπ᾽ ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ᾽ ἄλληλα πεσοῦνται. ἐσσοῦνται δὴ μεγέθεα τινὰ παραλληλόγραμμα, ἴσα τῷ κζ, ἄρτια τῷ πλήθει. καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ᾽ εὐθείας κείμενα, καὶ τὰ μέσα ἴσα. καὶ πάντα τὰ ἐφ᾽ ἑκάτερα τῶν μέσων, αὐτά τε ἴσα ἐντί, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι. τοῦ ἐκ πάντων αὐτῶν ἄρα συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μέσων χωρίων. οὐκ ἔστι δέ. τὸ γὰρ θ ἐκτός ἐστι τῶν μέσων παραλληλογράμμων. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς εζ εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου.

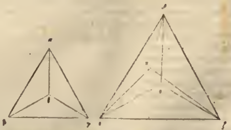
ι Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτοντι. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ ἁ εζ τέμνουσα τὰς αβ, γδ δίχα. ἁ δὲ κλ τὰς αγ, βδ. ἐστὶ δὴ τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εζ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. διὰ ταῦτα δὲ καὶ ἐπὶ τᾶς κλ. τὸ θ ἄρα σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρεος. κατὰ δὲ τὸ θ, αἱ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου πίπτοντι. ὥστε δέδεικται τὸ προτεθέν.



Ἔστι δὲ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ δεῖξαι. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ δβ. τρίγωνα ἴσα ἐντί, καὶ ὅμοια ἀλλάλοις, ὥστε ἐφαρμοζομένων ἐπ᾽ ἄλληλα τῶν τριγώνων, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ᾽ ἄλληλα πεσοῦνται. ἔστω δὴ τοῦ αβδ τριγώνου, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. καὶ τετμάσθω δίχα ἁ δβ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπιζεύχθω ἁ εθ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπειλήφθω ἁ ζθ ἴσα τᾷ θε. ἐφαρμοζομένου δὴ τοῦ αβδ τριγώνου ἐπὶ τὸ βδγ τρίγωνον, καὶ τεθείσας τᾶς αβ πλευρᾶς ἐπὶ τὰν δγ, τᾶς δὲ αδ ἐπὶ τὰν βγ. ἐφαρμόζει καὶ ἁ θε εὐθεῖα ἐπὶ τὰν ζθ. καὶ τὸ ε σαμεῖον ἐπὶ τὸ ζ πεσεῖται. ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αδγ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν αβδ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον, τοῦ δὲ δβγ τὸ ζ. δῆλον ὡς τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ μέσον τᾶς εζ εὐθείας, ὅπερ ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον.

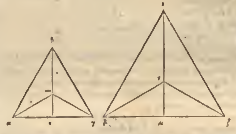


ια Ἂν δύο τρίγωνα ὅμοια ἀλλάλοις ᾖ, καὶ ἐν αὐτοῖς σαμεῖα ὁμοίως κείμενα πρὸς τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἐν σαμεῖον τοῦ ἐν ᾧ ἐστὶ τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος, καὶ τὸ λοιπὸν σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, τοῦ ἐν ᾧ ἐστὶ τριγώνου. ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖον κεῖσθαι ποτὶ τὰ ὅμοια σχήματα, ἀφ᾽ ὧν αἱ ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς, ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ. καὶ ἔστω ὡς ἁ αγ πρὸς δζ, οὕτως ἅ τε αβ πρὸς δε. καὶ ἁ βγ πρὸς εζ. καὶ ἐν τοῖς εἰρημένοις τριγώνοις σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ἔστω τὰ θ, ν πρὸς τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα, καὶ ἔστω τὸ θ



τὸ θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου. λέγω ὅτι καὶ τὸ ν κέντρον βάρεός ἐστι τοῦ δεζ τριγώνου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ η κέντρον βάρεος τοῦ δεζ τριγώνου. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θβ, θγ, δν, εν, ζν, δη, εη, ζη. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ, καὶ κέντρα τῶν βαρέων ἐστί, τὰ θ, η σαμεῖα. τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐστὶ κείμενα, ὥς τε ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. ἴσα ἄρα ἁ ὑπὸ η δε γωνία, τᾷ ὑπὸ θαβ. ἀλλὰ ἁ ὑπὸ θαβ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ εδν, διὰ τὸ ὁμοίως κεῖσθαι τὰ θ ν σημεῖα, καὶ ἁ ὑπὸ εδη γωνία ἄρα ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ εδν, ἁ μείζων τᾷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐκ ἐστὶ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ δεζ τριγώνου τὸ ν σαμεῖον. ἐστὶν ἄρα τὸ ν σαμεῖον, ὅπερ.

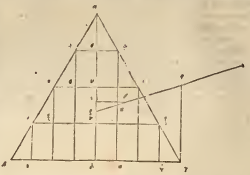
Εἴκα δύο τρίγωνα ὅμοια ἐόντα, τοῦ δὲ ἑνὸς τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστι ἀπό τινος γωνίας ἐπὶ μέσαν βάσιν ἀγομένα, καὶ τοῦ λοιποῦ τριγώνου τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰς ὁμοίας ἀγομένας γραμμάς. ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ. καὶ ἔστω ὡς ἁ αγ πρὸς δζ, οὕτως ἅ τε αβ πρὸς δε, καὶ ἁ βγ πρὸς ζε. καὶ τμαθείσας τᾶς αγ δίχα κατὰ τὸ η, ἐπεζεύχθω ἁ βη, καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου, ἐπὶ τᾶς βη, τὸ θ. λέγω ὅτι καὶ τοῦ εδζ ι



τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ὁμοίως ἀγομένας εὐθείας. τετμάσθω ἁ δζ δίχα κατὰ τὸ μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ εμ. καὶ γεγονέτω ὡς ἁ βη πρὸς βθ, οὕτως ἁ με πρὸς εν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αθ, θγ, δν, νζ. ἐπεὶ ἐστὶ τᾶς μὲν γα, ἡμίσεια ἁ αη. τᾶς δὲ δζ, ἡμίσεια ἁ δμ. ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ἁ βα πρὸς εδ, οὕτως ἁ αη πρὸς δμ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογον ἐντί. ἴσα τε ἄρα ἐστὶν ἁ ὑπὸ αηβ, τᾷ ὑπὸ δμε. καὶ ἐστὶν ὡς ἁ αη πρὸς δμ, οὕτως ἁ βη πρὸς εμ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἁ βη πρὸς βθ, οὕτως ἁ με πρὸς εν. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ αβ πρὸς δε, οὕτως ἁ βθ πρὸς εν. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογον εἰσί. εἰ δὲ τοῦτο, ἴσα ἐστὶν ἁ ὑπὸ βαθ γωνία τᾷ ὑπὸ εδν, ὥς τε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ θαγ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ νδζ γωνίᾳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἁ μὲν ὑπὸ βγθ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ εζν. ἁ δὲ ὑπὸ θγη, τᾷ ὑπὸ νζμ ἴσα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ ὑπὸ αβθ τᾷ ὑπὸ δεμ ἴσα, ὥς τε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ θβγ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ νεζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ πάντα ὁμοίως κεῖται τὰ θ, ν σαμεῖα ποτὶ ὁμολόγους πλευράς, καὶ ἴσας γωνίας ποιεῖ. ἐπεὶ οὖν ὁμοίως κεῖται τὰ θ ν σαμεῖα. καὶ ἐστὶ τὸ θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου, καὶ τὸ ν ἄρα κέντρον βάρεος τοῦ δεζ.

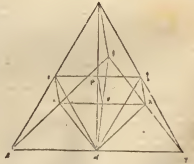
Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἐκ τᾶς γωνίας ἐπὶ μέσαν ἀναγομένα τὰν βάσιν. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἔστω ἐν αὐτῷ ἁ αδ ἐπὶ μέσαν τὰν βγ βάσιν. δεικτέον ὅτι ἐπὶ τᾶς αδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ θ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὰν βγ ἄχθω ἁ θι, ἁ ἄλλη δίχα τεμνομένας τᾶς δγ ἴσας ἐσσεῖται ἁ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς θι. καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν βδ, δγ εἰς τὰς ἴσας. καὶ διὰ τῶν τομῶν παρὰ τὰν αδ ἄχθωσαν καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εζ, ηκ, λμ. ἐσοῦνται δὴ αὗται παρὰ τὰν βγ. τοῦ δὲ παραλληλογράμμου τοῦ μὲν μν, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, ἐπὶ τᾶς υσ. τοῦ δὲ κξ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς τυ. τοῦ δὲ ζο, ἐπὶ τᾶς τδ. τοῦ ἄρα ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς σδ εὐθείας. ἔστω δὴ τὸ ρ. καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ρθ, καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν αδ ἁ γφ. τὸ δὴ αδγ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ ἀναγεγραμμένα ὅμοια τῷ αδγ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γα πρὸς αμ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς αμ, μκ, κζ, ζγ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ αδβ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ ἀπὸ τῶν αλ, λη, ηε, εβ ἀναγεγραμμένα ὅμοια τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ βα πρὸς αλ. τὸ ἄρα αβγ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γα πρὸς αμ. ἀλλὰ ἁ γα πρὸς αμ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ φρ πρὸς ρθ. ὁ γὰρ τᾶς γα πρὸς αμ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὅλας τᾶς φρ πρὸς ρπ, διὰ τὸ ὅμοια εἶναι τὰ τρίγωνα. καὶ τὸ αβγ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὰ εἰρημένα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φρ πρὸς ρθ. ὥς τε ια

καὶ λείποντι τὰ μν, κξ, ζο παραλληλόγραμμα πρὸς τὰ καταλειπόμενα τρίγωνα, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φθ πρὸς θε. γεγονέτω οὖν ἐν τῷ τῶν παραλληλογράμμων πρὸς τὰ τρίγωνα λόγῳ ἁ χθ πρὸς θε. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τὸ μέγεθος τὸ αβγ, οὗ τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ θ, καὶ ἀφῄρηται ἀπ' αὐτοῦ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν μν, κξ, ζο παραλληλογράμμων, καὶ ἐστὶ τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ρ σαμεῖον, τοῦ ἄρα λοιποῦ μεγέθεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τριγώνων κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ρθ εὐθείας ἐκβληθείσας, καὶ ἀπολαφθείσας ἐπὶ ταὶ θε, τὰν ἐχούσας τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος ποτὶ τὸ λοιπόν. τὸ ἄρα χ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων, ὅπερ ἀδύνατον· τᾶς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ ταὶ αδ ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ ταῦτα πάντα ἐστί, τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.



ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ.

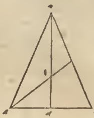
Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἄχθω ἁ αδ ἐπὶ μέσαν ταὶ βγ. λέγω ὅτι ἐπὶ τᾶς αδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ τε αθ, θβ, θγ. καὶ αἱ εδ, ζε ἐπὶ μέσας τὰς βα, αγ. καὶ παρὰ ταὶ αθ ἄχθωσαν αἱ εκ, ζλ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κλ, λδ, δκ, δθ, μν. ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δζγ τριγώνῳ, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν βα τᾷ ζδ. καὶ ἐστὶ τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. καὶ τοῦ ζδγ ἄρα τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ λ σαμεῖον. ὁμοίως γὰρ ἀντικείμενα τὰ θ, λ σαμεῖα ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων, ἐπειδήπερ πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας ποιοῦντι γωνίας. φανερὸν γὰρ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τοῦ εβδ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ κ σαμεῖον. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εβδ, ζδγ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ μέσας τᾶς κλ εὐθείας. ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τὰ εβδ, ζδγ τρίγωνα. καὶ ἐστὶ τᾶς κλ μέσον τὸ ν. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἁ βε πρὸς εα, οὕτως ἁ βκ πρὸς θκ. ὡς δὲ ἁ γζ πρὸς ζα, οὕτως ἁ γλ πρὸς λθ. εἰ δὲ τοῦτο, ἐστὶν ἁ βγ τᾷ κλ παράλληλος. καὶ ἐπεζεύχθω ἁ δθ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ βδ πρὸς δγ, οὕτως ἁ κν πρὸς ταὶ νλ. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ ν. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ αεδζ παραλληλογράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ σαμεῖον, ὥστε τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς μν εὐθείας. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ αβγ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. ἁ μν ἄρα ἐκβαλλομένα πο-



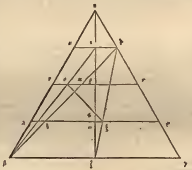
ρεύσεται

ρεῖται διὰ τοῦ θ σαμείου, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, τοῦ αβγ τριγώνου, οὐκ ἐστὶν ἐπὶ τᾶς αδ εὐθείας. ἐστὶν ἄρα ἐπ᾽ αὐτᾶς.

Παντὸς τριγώνου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ συμπίπτοντι τοῦ τριγώνου αἱ ἐκ τῶν γωνιῶν ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἄχθω ἁ μὲν αδ ἐπὶ μέσαν τὰν βγ. ἁ δὲ βε ἐπὶ μέσαν τὰν αγ. ἐσσεῖται δὴ τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος, ἐφ᾽ ἑκατέρας τᾶν αδ, βε. δέδεικται γὰρ τοῦτο, ὥστε τὸ θ σαμεῖον, κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν. ιβ



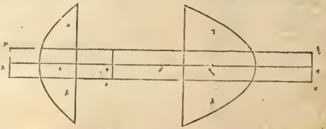
Παντὸς τραπεζίου τὰς δύο πλευρὰς ἔχοντος παραλλάλους ἀλλάλαις, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τῶν παραλλήλων διαιρεθείσας, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὰν διχοτομίαν τᾶς ἐλάσσονος τῶν παραλλήλων ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ ἴσα τᾶς διπλασίας τᾶς μείζονος μετὰ τᾶς ἐλάσσονος, πρὸς τὰν διπλασίαν τᾶς ἐλάσσονος μετὰ τᾶς μείζονος τῶν παραλλήλων. ἔστω τραπέζιον τὸ αβγδ παραλλάλους ἔχον τὰς αδ, βγ. ἁ δὲ εζ ἐπιζευγνυέτω τὰς διχοτομίας τᾶν αδ, βγ. ὅτι οὖν ἐπὶ τᾶς εζ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ τραπεζίου, φανερόν. καὶ γὰρ ἐκβαλλομένας τὰς γδ η, ζε η, βα η, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σαμεῖον ἔρχονται. ἐσσεῖται τὸ τοῦ ηβγ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ηζ. καὶ ὁμοίως τοῦ αηδ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος, ἐπὶ τᾶς εη. καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ αβγδ τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς εζ. ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ βδ διῃρήσθω εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ κ, θ σαμεῖα, καὶ δι᾽ αὐτῶν παρὰ τὰν βγ ἄχθωσαν αἱ λθμ, νκτ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δζ, βε, οξ. ἐσσεῖται δὴ τοῦ μὲν δβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς θμ. ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἁ θβ τᾶς βδ, καὶ διὰ τοῦ θ σαμείου παράλληλος τᾷ βάσει ἆκται ἁ μθ. ἔστι δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ δβγ τριγώνου, καὶ ἐπὶ τᾶς δζ. ὥστε τὸ ξ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εἰρημένου τριγώνου. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τὸ ο σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβδ τριγώνου. τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν αβδ, βδγ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, ὅπερ ἐστὶ τραπέζιον, κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς οξ εὐθείας, ἐστὶ δὲ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος καὶ ἐπὶ τᾶς εζ. ὥστε τοῦ αβγδ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ π σαμεῖον. ἔχοι δ᾽ ἂν τὸ βγδ τρίγωνον πρὸς τὸ αβδ λόγον, ὃν ἁ οπ πρὸς πξ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ βδγ τρίγωνον πρὸς τὸ αβδ τρίγωνον, οὕτως ἐστὶ ἁ βγ πρὸς αδ. ὡς δὲ ἁ οπ πρὸς πξ, οὕτως ἁ πρ πρὸς πσ. καὶ ὡς ἄρα ἁ βγ πρὸς αδ, οὕτως ἁ ρπ πρὸς πσ. ὥστε καὶ ὡς δύο αἱ βγ μετὰ τᾶς αδ, πρὸς δύο τὰς αδ, μετὰ τᾶς βγ, οὕτως δύο αἱ ρπ μετὰ τᾶς πσ, πρὸς δύο τὰς πσ, μετὰ τᾶς πρ. ἀλλὰ δύο μὲν αἱ ρπ μετὰ τᾶς πσ, συναμφότερος ἐστὶν ἁ σρπ, τουτέστιν ἁ πε. δύο δὲ αἱ πσ μετὰ τᾶς πρ, συναμφότερος ἐστὶν ἁ ρπσ, τουτέστιν ἁ πζ. δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα. ιγ



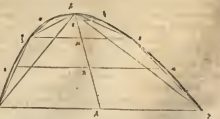
Ἀρχι-

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ Β.

α Εἴκα δύο χωρία περιεχόμενα ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχοντα, τοῦ δὲ ἀμφοτέρων αὐτῶν συγκειμένου μεγέθεος, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν, διαιρέον οὕτως τὰν εἰρημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τοῖς χωρίοις. ἔστω δύο χωρία τὰ αβ, γδ, οἷα εἴρηται. κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος τὰ ε, ζ σαμεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον τὸ αβ ποτὶ τὸ γδ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ζθ πρὸς θε. δεικτέον ὅτι τοῦ δὲ ἀμφοτέρων τῶν αβ, γδ χωρίων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον. ἔστω δὲ τᾷ μὲν εθ ἑκατέρα ἴσα τῶν ζη, ζκ. τᾷ δὲ ζθ, τουτέστι τᾷ ηε ἴσα ἁ ελ. ἔσται καὶ ἁ λθ τᾷ κθ ἴσα. καὶ ὅτι ὡς ἁ λκ πρὸς ηκ, οὕτως τὸ αβ πρὸς γδ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. παραβεβλήσθω δὲ παρὰ τὰν λη τὸ σαμεῖον τοῦ αβ ἐφ᾽ ἑκάτερα τᾶς λη. ὥστε εἰ μὲν τὸ μν ἴσον τῷ αβ. ἔσται δὲ τοῦ μν κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. συμπεπληρώσθω δὴ τὸ νξ. ἑξεῖ δὲ τὸ μν πρὸς τὸ νξ λόγον, ὃν ἁ λη πρὸς ηκ. ἔχει δὲ καὶ τὸ αβ πρὸς τὸ γδ, τὸν τᾶς λη πρὸς ηκ λόγον. καὶ ὡς ἄρα τὸ αβ πρὸς γδ, οὕτως τὸ μν πρὸς τὸ νξ. καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τὸ αβ τῷ μν. ἴσον ἄρα καὶ τὸ γδ τῷ νξ. καὶ κέντρον ἐστὶν αὐτοῦ τοῦ βάρεος τὸ ζ σαμεῖον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ λθ τᾷ θκ, καὶ ὅλα ἁ λκ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς δίχα τέμνει, τοῦ ὅλου τοῦ ξμ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον, ἀλλὰ τὸ μξ ἴσον τῷ δὲ ἀμφοτέρων τῶν μν, νξ. καὶ τοῦ δὲ ἀμφοτέρων τῶν αβ, γδ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον.



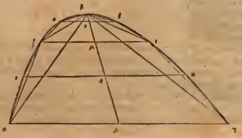
Εἴκα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάλιν εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὰς αὐτὰς βάσεις ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὸν αὐτὸν τρόπον, τὸ γενόμενον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι γνωρίμως ἐγγεγράφθαι λεγέσθω. φανερὸν δὲ ὅτι τοῦ οὕτως ἐγγραφέντος σχήματος, αἱ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύουσαι, τᾶς τε ἔγγιστα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος καὶ τὰς ἑξῆς, παρὰ τὰν βάσιν ἐσσοῦνται τοῦ τμάματος. καὶ δίχα τμαθήσονται ὑπὸ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου, καὶ τὰν διάμετρον τεμοῦντι εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος, ὥσπερ δέδεικται ἐν ταῖς τάξεσιν.

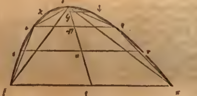


β Εἰ δὲ καὶ εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγραφῇ, τοῦ ἐγγραφέντος κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου. ἔστω τμᾶμα τὸ αβγ, οἷον εἴρηται. καὶ ἐγγρ-

ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ α ε ζ η β θ ι κ γ. διάμετρος δὲ τοῦ τμήματος ἔστω ἁ β δ. δεικτέον ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εὐθυγράμμου ἐστὶν ἐπὶ τᾶς β δ. ἐπεὶ γὰρ τοῦ μὲν α ε κ γ τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς λ δ ἐστί, τοῦ δὲ ε ζ ι κ τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς μ λ. τοῦ δὲ ζ η θ ι τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς μ ν. ἔτι δὲ καὶ τοῦ η β θ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς β ν. δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς β δ ἐστίν.

Εἴκα δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εἰς ἑκάτερον εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, ἔχωντι δὲ τὰ ἐγγραφέντα εὐθύγραμμα τὰς πλευρὰς ἴσας τῷ πλήθει ἀλλάλαις, τῶν εὐθυγράμμων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως τέμνοντι τὰς διαμέτρους τῶν τμαμάτων. ἔστω δύο τμάματα τὰ α β γ, ξ ο π. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὰ εὐθύγραμμα γνωρίμως τῶν πασᾶν πλευρᾶν τὸν ἀριθμὸν ἐχόντων ἀλλήλοις ἴσον. διάμετροι δὲ ἔστωσαν τῶν τμαμάτων αἱ β δ, ο ρ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε κ, ζ ι, η θ. καὶ σ τ, υ φ, χ ψ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν β δ διαιρεῖται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν περισσοὺς λόγους, καὶ ἁ ρ ο, ὁμοίως καὶ τῷ πλήθει τὰ τμάματα αὐτῶν ἴσα ἐντί, δῆλον ὡς τά τε τμάματα τῶν διαμέτρων τοῖς αὐτοῖς λόγοις ἐσσεῖται. καὶ αἱ παράλληλοι τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦντι. καὶ τῶν τραπεζίων, τοῦτ' α ε κ γ. καὶ τοῦ ξ σ τ π τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσεῖται ἐπὶ τῶν λ δ, ω ρ εὐθειῶν ὁμοίως κείμενα, ἐπεὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον αἱ α γ, ε κ ταῖς ξ π, σ τ. πάλιν δὲ καὶ τῶν ε ζ ι κ, σ υ φ τ τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται, ὁμοίως διαιρέοντα τὰς λ μ, ω ϡ. καὶ ἐν τοῖς ζ θ, υ ψ τραπεζίοις τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρέοντα τὰς μ ν, ϡ ϛ. ἔσται δὲ καὶ τῶν η β θ, χ ο ψ τριγώνων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐπὶ τῶν β ν, ο ϛ ὁμοίως κείμενα. ἔχοντι δὲ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ τραπέζια καὶ τὰ τρίγωνα, δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ α β γ τμάματι γεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ὁμοίως διαιρεῖ τὰν β δ. καὶ τοῦ ἐν τῷ ξ ο π τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰν ο ρ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. γ

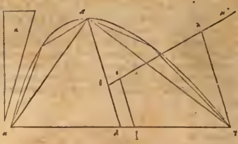




Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου. ἔστω τμᾶμα ὡς εἴρηται τὸ α β γ, οὗ διάμετρος ἔστω ἁ β δ. δεικτέον ὅτι τοῦ εἰρημένου τμάματος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς β δ. εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ ε. καὶ δι' αὐτοῦ ἄχθω παρὰ τὰν β δ ἁ ε ζ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τμᾶμα τρίγωνον τὸ α β γ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον καὶ ὕψος ἴσον. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ γ ζ πρὸς δ ζ, τοῦτον ἐχέτω τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς τὸ κ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμᾶμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ κ. τοῦ δὲ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς β δ. ἔστω τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθω ἁ θ ε, καὶ ἐκβεβλήσθω. καὶ παρὰ τὰν β δ ἄχθω ἁ γ λ. δῆλον δὲ ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰ λειπόμενα τμάματα, ἢ τὸ α β γ τρίγωνον ποτὶ τὸ κ. ἀλλ' ἐστὶν ὡς τὸ α β γ τρίγωνον ποτὶ τὸ κ, οὕτως ἁ γ ζ πρὸς ζ δ. καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ γ ζ πρὸς ζ δ, τουτέστιν ἁ λ ε πρὸς ε θ. ἐχέτω οὖν ἁ μ ε πρὸς ε θ τὸν αὐτὸν λόγον τοῦ ἐγγεγραμ- δ

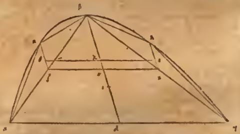
μένου

μένου πρὸς τὰ τμάματα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ε κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ εὐθυγράμμου τὸ θ, δῆλον ὅτι λοιποῦ τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐκβληθείσας τᾶς θε, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας, ἃ λόγον ἔχει ποτὶ τὰν θε, ὃν τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ



περιλειπόμενα τμάματα. ὥστε εἴη κα τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ σαμεῖον, ὅπερ ἄτοπον. τὰ γὰρ διὰ τοῦ μ παρὰ τὰν βδ ἀγομένας, ἐπὶ ταῦτα ἐσσοῦνται πάντα τὰ περιλειπόμενα τμάματα. δῆλον οὖν ὅτι ἐπὶ τᾶς βδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

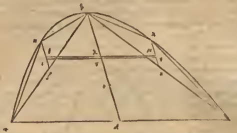
Εἴκα ἐς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, τὸ τοῦ ὅλου τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐγγύτερον ἐστὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος, ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον. ἔστω τὸ αβγ τμᾶμα, οἷον εἴρηται. διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἁ δβ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον πρῶτον γνωρίμως τὸ αβγ, καὶ τετμήσθω ἁ βδ κατὰ τὸ ε. ὥστε εἶμεν διπλασίαν τὰν βε τᾶς εδ, ἐστὶν οὖν τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον.



τετμάσθω δὲ δίχα ἑκατέρα τᾶν αβ, βγ, κατὰ τὰ ζ, η. καὶ διὰ τᾶν ζ, η παρὰ τὰν βδ ἄχθωσαν αἱ ζκ, ηλ. ἐσσεῖται ἄρα τοῦ μὲν ακβ τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ζκ. τοῦ δὲ βλγ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ηλ. ἔστω δὲ τὰ θ, ι. καὶ ἐπεζεύχθω ἁ θι, ζη. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ θζηι, καὶ ἴσα ἐστὶ ἁ ζν τᾷ νη, ἐστὶν ἄρα ἁ χθ ἴσα τᾷ χι. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ μέσας τᾶς θι. ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τὰ τμάματα, τουτέστι τὸ χ σαμεῖον. ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε σαμεῖον, τοῦ δὲ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ λγ τὸ χ, δῆλον οὖν ὅτι ὅλου τοῦ τμάματος τοῦ αβγ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς χε, τουτέστι μεταξὺ τῶν χ, ε σαμείων, ὥστ' εἴη κα ἐγγύτερον τᾶς τοῦ τμάματος κορυφᾶς τὸ κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, ἢ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου γνωρίμως.

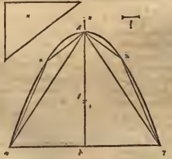
Ἐγγεγράφθω πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα πεντάγωνον εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ ακβλγ. καὶ ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος διάμετρος ἁ βδ. ἑκατέρου δὲ τῶν τμαμάτων, ἑκατέρα τῶν κζ, λη διαμέτρων. καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ ακβ τμάματι ἐγγέγραπται εὐθύγραμμον γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐγγύτερον τᾶς κορυφᾶς, ἢ τὸ τοῦ εὐθυγράμμου. ἔστω οὖν τοῦ μὲν ακβ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ι. πάλιν δὲ ἔστω τοῦ μὲν βλγ τμάματος, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ν, καὶ ἐπεζεύχθω τὰ θμ, ιν. ἔστι ἄρα ἐστὶν ἁ θχ τᾷ χμ,

τᾶς χμ, ἁ δὲ ιτ τᾶς τν. ἀλλὰ καὶ τρίγωνον τὸ ακβ ἴσον ἐστὶ τῷ βλγ. τμᾶμα δὲ τὸ ακβ τμάματι τῷ βλγ. δέδεικται γὰρ ἐν ἄλλοις, τὰ τμάματα ἐπίτριτα εἶμεν τῶν τριγώνων. ἔσται οὖν τοῦ μὲν δὲ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ χ. τοῦ δὲ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τριγώνων τὸ τ. πάλιν οὖν ἐπεὶ τοῦ αβγ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε. τοῦ δὲ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων, τὸ χ. δῆλον ὡς τοῦ ὅλου τοῦ αβγ τμάματος



τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς χε τμαθείσας οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τὰ ακβ, βλγ τμάματα, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τὸ τμᾶμα αὐτᾶς, τὸ πρὸς ε ἔχον τὸ χ, ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα. τοῦ δὲ ακβλγ πενταγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ετ εὐθείας τμαθείσας οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα, τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὸ τ ποτὶ τὸ λοιπόν. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ κ α β, λ β γ τρίγωνα, ἢ ποτὶ τμάματα. δῆλον οὖν ὅτι τοῦ αβγ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἐγγύτερόν ἐστι τᾶς β κορυφᾶς, ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου. καὶ ἐπὶ πάντων εὐθυγράμμων, τῶν ἐγγραφομένων ἐν τὰ τμάματα γνωρίμως ὁ αὐτὸς λόγος.

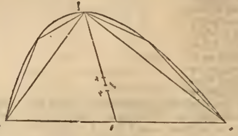
Τμάματος δοθέντος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, δυνατόν ἐστι τὸ ς
τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγράψαι, ὥστε τὰν μεταξὺ εὐθεῖαν τῶν κέντρων τοῦ βάρεος τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου, ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς προτεθείσας εὐθείας. δεδόσθω τμᾶμα τὸ αβγ, οἷον εἴρηται. οὗ κέντρον ἔστω τοῦ βάρεος τὸ θ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον γνωρίμως τὸ αβγ. καὶ ἔστω ἁ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἁ ζ. καὶ ὃν λόγον ἔχει ἁ βθ πρὸς ζ, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ κ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ αβγ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ ακβλγ. ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ κ. καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε. φαμὶ δὴ τὰν θε ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς ζ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ μείζων. ἐπεὶ δὲ τὸ ακβλγ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς κ, τουτέστιν ἁ θβ πρὸς ζ. ἔχει δὲ καὶ ἁ βθ πρὸς ζ οὐκ ἐλάσσονα λόγον, ἢ ὃν ἔχει πρὸς θε. διὰ τὸ μὴ ἐλάσσονα εἶμεν τὰν θε τᾶς ζ. πολλῷ ἄρα τὸ ακβλγ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ βθ πρὸς θε. ὥστε ἐὰν ποιῶμεν, ὡς τὸ ακβλγ εὐθύγραμμον πρὸς περιλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἄλλαν τινὰ πρὸς θε, ἔσται μείζων τᾶς βθ. καὶ

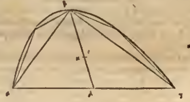


ἔστω ἁ θη. ἐπεὶ δὲ τοῦ αβγ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ, εὐθυγράμμου δὲ τοῦ ακβλγ τὸ ε, ἐκβληθείσας τᾶς εθ, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας ἐχούσας λόγον πρὸς τὰν εθ, ὃν τὸ ακβλγ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα, ἔσται μείζων τᾶς βθ. ἐχέτω οὖν ἁ ηθ πρὸς θε

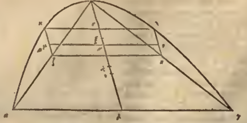
τὸ κ ἄρα κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων, ὅπερ ἀδύνατον. τὰς γὰρ διὰ τοῦ κ ἀχθείσας παρὰ τὰν αγ ἐπὶ τὰ αὐτά ἐστι τῶν τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι ἁ βε ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ζ. ἔδει δὲ τοῦτο δεῖξαι.

ζ Δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὰ κέντρα τῶν βαρέων εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους. ἔστω δύο τμάματα, οἷα εἴρηται, τὰ αβγ, εζη, ὧν διάμετροι αἱ βδ, ζθ. καὶ ἔστω τοῦ μὲν αβγ τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ κ σαμεῖον, τοῦ δὲ εζη τὸ λ. δεικτέον ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους τὰ κ, λ. εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ἁ κβ πρὸς κδ, οὕτως ἁ ζμ πρὸς θμ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ εζη τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως, ὥστε τὰν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς λμ· καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ξ σαμεῖον. ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸ αβγ τμᾶμα τῷ ἐν τῷ εζη ἐγγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος τᾶς κορυφᾶς ἐγγύτερον ἤπερ τοῦ τμάματος, ὅπερ ἀδύνατον. δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ βκ πρὸς κδ, ὃν ἁ ζλ πρὸς λθ.





η Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κέντρον τοῦ βάρεος διαιρεῖ τὰν τοῦ τμάματος διάμετρον, ὥστε εἶμεν ἁμιόλιον τὸ μέρος αὐτᾶς τὸ ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος, τοῦ ποτὶ τὰν βάσιν. ἔστω τὸ αβγ τμᾶμα, οἷον ὡς εἴρηται, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ βδ. κέντρον δὲ τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. δεικτέον ὅτι ἁμιολία ἐστὶν ἁ βθ τᾶς θδ. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ αβγ τμᾶμα γνωρίμως τρίγωνον τὸ αβγ. οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ ε. καὶ τετμάσθω δίχα ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, κατὰ τὰ ζ, η, καὶ ἄχθωσαν παρὰ τὰν βδ, αἱ κζ, ηλ. διάμετροι ἄρα γίνονται τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων. ἔστω οὖν τοῦ μὲν ακβ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ, τοῦ δὲ βλγ τὸ ν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζη, μν, κλ. τοῦ ἄρα δὴ ἀμφοτέρων τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ χ. καὶ ἐπεὶ δή ἐστιν ὡς ἁ βθ πρὸς θδ, οὕτως



ἁ κμ

ἁ κμ πρὸς μζ. καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἁ βδ πρὸς τὰν κζ, οὕτως ἁ θδ πρὸς τὰν μζ. ἁ δὲ βδ τετραπλασίων τᾶς κζ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται, οὗ σαμεῖον ὁ θ. τετραπλασίων ἄρα καὶ ἁ δθ τᾶς μζ. ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ βθ λοιπᾶς τᾶς κμ, τουτέστι τᾶς σχ τετραπλασίων. καὶ λοιπὸν ἄρα συναμφότερα ἁ βσ, χθ τριπλασίων τᾶς σχ. ἔστω τριπλὰ ἁ βσ τᾶς σξ. καὶ ἁ χθ ἄρα τᾶς ξχ ἐστὶ τριπλασία. καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἁ βδ τᾶς βσ, καὶ τοῦτο δείκνυται. ἁ δὲ βσ τᾶς σξ τριπλασίων. ἁ ξβ ἄρα τᾶς βδ τρίτον μέρος ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἁ εδ τᾶς δβ τρίτον μέρος. ἐπειδήπερ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου ἐστὶ τὸ ε, καὶ λοιπὰ ἄρα ἁ ξε τρίτον μέρος τᾶς βδ. καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ χ, τοῦ δὲ αβγ τριγώνου τὸ ε. ἔσται ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ καταλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἁ χθ πρὸς θε. τριπλάσιον δὲ τὸ αβγ τρίγωνον τῶν τμαμάτων. ἐπειδήπερ τὸ ὅλον τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ αβγ τριγώνου. τριπλασία ἄρα καὶ ἁ χθ τᾶς θε. ἐδείχθη δὲ ἁ χθ τριπλασία καὶ τᾶς χξ. πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ξε τᾶς εθ. τουτέστιν ἁ δε τᾶς εθ. ἴσα γὰρ ἐντὶ αὐταί. ὥστε ἑξαπλασία ἐστὶν ἁ δθ τᾶς θε. καὶ ἐντὶ τᾶς δε τριπλασία ἁ βδ. ἡμιολία ἄρα ἐντὶ ἁ βθ τᾶς θδ.

Εἴκα τέσσαρες γραμμαὶ ἀνὰ λόγον ἔωντι ἐν τᾷ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ἐλαχίστα ποτὶ τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰ τρία πεμπταμόρια τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἀνὰ λόγον τᾶς τρίτας. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μεγίστας τᾶς ἀνὰ λόγον, καὶ τᾷ τετραπλασίᾳ τᾶς δευτέρας, καὶ τᾷ ἑξαπλασίᾳ τᾶς γ, καὶ τᾷ γ τᾶς δ, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε ε τᾶς μεγίστας, καὶ τᾷ ι τᾶς β, καὶ τᾷ ι τᾶς γ, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς δ, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἀνὰ λόγον τᾶς τρίτας, συναμφότεραι αἱ λαφθεῖσαι ἐσσοῦνται δύο πεμπταμόρια τᾶς μεγίστας. ἔστωσαν τέσσαρες γραμμαὶ ἀνὰ λόγον αἱ αβ, βγ, βδ, βε. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ βε πρὸς εα, τοῦτον ἐχέτω ἁ ζη ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ β τᾶς αβ, καὶ δ τᾶς βγ, καὶ ς τᾶς βδ, καὶ γ τᾶς βε, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ ε τᾶς αβ, καὶ ι τᾶς γβ, καὶ ι τᾶς βδ, καὶ ε τᾶς βε, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον ἁ ηθ ποτὶ τὰν αδ. δεικτέον ὅτι ἁ ζθ δύο 9



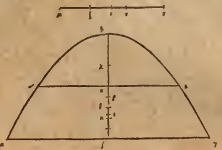
πεμπταμόριά ἐντι τᾶς αβ. ἐπεὶ γὰρ ἀνὰ λόγον ἐντὶ αἱ αβ, βγ, βδ, βε, καὶ αἱ αγ, γδ, δε, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί. καὶ συναμφότερος ἁ αβ, βγ πρὸς τὰν βδ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ αδ ποτὶ τὰν δε. καὶ συναμφότερος ἁ βδ, βγ ποτὶ τὰν εβ. καὶ πάντα πρὸς πάντα. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ τᾷ γ τᾶς γβ, καὶ ἁ δβ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε β, τᾶς βδ καὶ τὰν βε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ τᾷ δ τᾶς βγ, καὶ τᾷ δ τᾶς βδ, καὶ τᾷ β τᾶς βε, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε β τᾶς δβ, καὶ τὰν εβ, τοῦτον ἕξει ἁ δα πρὸς ἐλάσσονα τᾶς δε. ἐχέτω οὖν πρὸς δθ. καὶ ἀμφότεραι δὲ ποτὶ τὰς πρώτας αὐτὰν ἕξουντι λόγον. ἕξει οὖν ἁ εα πρὸς αδ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ δ τᾶς γβ, καὶ ς τᾶς βδ, καὶ γ τᾶς βε, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β συναμφοτέρας τᾶς αβ, εβ, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ἔχει δὲ καὶ ἁ αδ πρὸς κθ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ι συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β τᾶς αβ, καὶ τᾶς δ τᾶς γβ, καὶ τᾶς γ τᾶς εβ, καὶ ς τᾶς βδ. ἀνομοίως δὲ τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμένᾳ ἀναλογίᾳ, δι᾽ ἴσου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ εα πρὸς κθ, ὃν ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ι τᾶς γβ, βδ. πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, ἀλλ᾽ ἁ συγκειμένα

ἐκ τε τᾶς ε συναμφοτέρου τᾶς α β, β ε, μετὰ τᾶς ι συναμφοτέρου τᾶς γ β, β δ. πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τε τᾶς β συναμφοτέρου τᾶς α β, β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γ β, β δ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἁ α ο πρὸς κ θ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἁ ο δ πρὸς δ α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ε β, μετὰ τᾶς β τᾶς β δ, πρὸς τὰν ἴσαν τᾷ συγκειμένᾳ ἐκ τε τᾶς β συναμφοτέρου τᾶς α β, β ε, μετὰ τᾶς δ συναμφοτέρου τᾶς γ β, β δ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἁ α δ πρὸς δ ε, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς β τᾶς α β, καὶ γ τᾶς γ β, καὶ τᾶς β δ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε ε β, καὶ τᾷ ϐ τᾶς β δ. ἀνομοίως οὖν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν τεταραγμένας οὔσας τᾶς ἀναλογίας, δι᾽ ἴσου ἐστὶν ὡς ἁ ο δ πρὸς δ ε, οὕτως ἁ β τᾶς α β, μετὰ τᾶς γ τᾶς β γ. καὶ ἁ β δ πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς β, συναμφοτέρου τᾶς α β, β ε, καὶ τᾶς δ τᾶς γ β, β δ. ὥς τε καὶ ὡς ἁ ε ο πρὸς ε δ ἐστίν, οὕτως ἁ γ β μετὰ τᾶς γ τᾶς β δ, καὶ β τᾶς ε β, πρὸς τὰν β συναμφοτέρου τᾶς α β, β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γ β, β δ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἁ δ ε πρὸς ε β, οὕτως ἅτε α γ πρὸς γ β. ἐπεὶ καὶ κατὰ σύνθεσιν καὶ ἁ γ τᾶς γ δ, πρὸς τὰν γ τᾶς δ β. καὶ ἁ β τᾶς δ ε, πρὸς τὰν β τᾶς ε β. ὥς τε καὶ ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς α γ, καὶ ἁ γ τᾶς γ δ, καὶ β τᾶς δ ε, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τε τᾶς γ ϐ, καὶ γ τᾶς δ ϐ, καὶ ϐ τᾶς ε ϐ. ἀνομοίως οὖν πάλιν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν γινομένας τεταραγμένας ἀναλογίας, δι᾽ ἴσου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ε ο πρὸς ε β, ὃν ἁ α γ μετὰ τᾶς γ τᾶς γ δ, καὶ ϐ τᾶς δ ε. πρὸς διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς α β, β ε, μετὰ τᾶς δ συναμφοτέρου τᾶς γ ϐ, ϐ δ. ὅλα οὖν ἁ ο ϐ πρὸς τὰν ε β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἴσα τᾷ τε γ τᾶς α ϐ μετὰ τᾶς ε τᾶς γ ϐ, καὶ τᾷ γ τᾶς ϐ δ πρὸς τὰν ϐ, συναμφοτέρου τᾶς α ϐ, ϐ ε, μετὰ τᾶς δ συναμφοτέρου τᾶς γ ϐ, ϐ δ. καὶ ἐπεὶ αἱ τε ε δ, δ γ, γ α ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί, καὶ συναμφότερος ἑκάστα τῶν ε β, ϐ δ, δ ϐ, ϐ γ, γ δ, γ α. ἔσται καὶ ὡς ἁ ε δ πρὸς δ α, οὕτως συναμφότερος ἁ ε ϐ, ϐ δ, πρὸς συναμφότερον τὰν δ ϐ, β γ, μετὰ τᾶς συναμφοτέρου τᾶς γ β, ϐ α. καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς α ε πρὸς α δ, οὕτως συναμφότερος ἁ ε ϐ, ϐ δ, μετὰ συναμφοτέρου τᾶς α β, β γ καὶ συναμφοτέρου τᾶς γ β δ. ὃ ἐστι συναμφότερος ἁ ε ϐ α, μετὰ τᾶς β συναμφοτέρου τᾶς δ β γ, πρὸς συναμφότερον τὰν ϐ δ, ϐ α, μετὰ τᾶς β τᾶς β γ. ὥς τε καὶ ἁ ϐ πρὸς τὰν ϐ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, τουτέστιν ὡς ἁ ε α πρὸς α δ, οὕτως ἁ β συναμφοτέρου τᾶς ε ϐ α, μετὰ τᾶς δ συναμφοτέρου τᾶς γ β δ, πρὸς τὰν ϐ, συναμφοτέρου τᾶς α β δ, μετὰ τᾶς δ τᾶς γ ϐ. ὥς τε ἁ ε α πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς α δ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς συναμφοτέρου τᾶς α β ε καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γ ϐ δ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα, τᾶς συγκειμένας ἐκ τε τᾶς ϐ συναμφοτέρου τᾶς α ϐ δ, καὶ δ τᾶς γ ϐ. ἀλλ᾽ ὡς ἁ ε α πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς α δ, οὕτως ἐστὶν ἁ ε ϐ πρὸς ζ κ. καὶ ὡς ἄρα ἁ ε ϐ πρὸς ζ κ, οὕτως ἁ ϐ συναμφοτέρου τᾶς α ϐ ε, μετὰ τᾶς δ συναμφοτέρου τᾶς δ ϐ γ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἐκ τε τᾶς ϐ συναμφοτέρου τᾶς α ϐ δ, μετὰ τᾶς δ τᾶς γ ϐ. ἐδείχθη δὲ ὡς ο ϐ πρὸς ε ϐ, οὕτως ἁ γ συναμφοτέρου τᾶς α ϐ δ, μετὰ τᾶς ε τᾶς γ ϐ, πρὸς τὰν ϐ συναμφοτέρου τᾶς α ϐ ε, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γ ϐ δ. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ ο ϐ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς γ συναμφοτέρου τᾶς α ϐ δ, καὶ ε τᾶς γ ϐ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἐκ τε τᾶς ϐ συναμφοτέρου τᾶς α ϐ δ, καὶ δ τᾶς γ ϐ. ἀλλὰ ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς γ συναμφοτέρου τᾶς α ϐ δ, καὶ ε τᾶς γ ϐ, πρὸς μὲν τὰν συγκειμέναν ἐκ τε τᾶς ϐ συναμφοτέρου τᾶς α ϐ δ, τᾶς γ ϐ, λόγον ἔχει ὃν τρία πρὸς δύο, πρὸς δὲ τὰ τρία πέμπτα τᾶς αὐτᾶς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ α ο πρὸς κ θ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ὅλα ἄρα ἁ β α πρὸς ὅλαν τὰν ζ θ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο, εἰ δὲ τοῦτο, δύο πεμπτημόρια ἐντὶ ἁ ζ θ τᾶς α β, ὅπερ ἔδει.

ι Παντὸς τόμου ἀπὸ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀφαιρουμένου, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας ἐστὶν ἃ διάμετρος ἐστὶ τοῦ τόμου. τὸν δὲ τρόπον κείμενον, διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας εἰς ἴσα πέντε ἐπὶ τοῦ μέσου πεμπταμορίου. ὥς τε τὸ τμῆμα αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον τᾶς ἐλάσσονος βάσιος τοῦ τόμου ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ἡμίσεος τᾶς μείζονος τῶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν συναμφοτέρα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ἐλάσσονος τῶν βάσεων, καὶ τᾷ μείζονι ποτὶ τὸ στερεόν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ἡμίσεος τᾶς ἐλάσσονος τᾶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μείζονος καὶ τᾷ ἐλάσσονι αὐτᾶν. ἔστωσαν ὀρθογωνίου κώνου τομαὶ δύο εὐθεῖαι αἱ α γ, δ ε. διάμετρος δὲ ἔστω τοῦ α β γ τμάματος, ἁ β ζ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ τοῦ α δ ε γ διάμετρος ἐστὶν ἁ η ζ. καὶ αἱ μὲν α γ, δ ε παράλληλοι ἐντὶ τᾷ κατὰ τὸ β ἐφαπτομένᾳ τᾶς τομᾶς. καὶ τᾶς η ζ εὐθείας, διαιρεθείσας εἰς πέντε ἴσα μέσον ἔστω πεμπταμόριον ἁ θ κ. ἁ δὲ θ ι πρὸς τὰν ι κ, τὸν αὐ-

τὸν

τὸν ἐχέτω λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾶ τε β τᾶς δκ, καὶ τᾶ αζ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς δκ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾶ β τᾶς αζ, καὶ τᾶ δκ. δεικτέον ὅτι τοῦ αδεγ τόμου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ ι σαμεῖον. ἔστω δὴ τᾶ μὲν ζβ ἴσα ἁ μν, τᾶ δὲ κβ ἴσα ἁ νο. καὶ εἰλήφθω ταῖν μὲν μν, νο μέσα ἀνάλογον ἁ νξ. τετάρτη δὲ ἀνὰ λόγον ἁ τν. καὶ ὡς ἁ τμ πρὸς τν, οὕτως ἁ ζθ πρός τινα ἀπὸ τοῦ ι, ὅπου ἂν ἔρχηται τὸ ἕτερον σαμεῖον. οὐδὲν γὰρ διαφέρει ἔτε καὶ μεταξὺ τῶν ζ, κ, ἔτε καὶ μεταξὺ τῶν κ, β, τὰν ιρ. καὶ ἐπεὶ γὰρ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶ διάμετρός ἐστι τοῦ τμάματος ἁ ζβ. ἁ βζ δὲ, ἤτοι ἀρχά ἐστι τᾶς τομᾶς, ἢ παρὰ τὰν διάμετρον ἦκται. αἱ δὲ αζ, δκ ὡς αὐτὰν τεταγμέναι εἰσὶ κατηγμέναι. ἐπειδὴ παράλληλοι εἰσὶ τᾷ ἀπὸ τοῦ β τᾶς τομᾶς ἐφαπτομένᾳ. εἰ δὲ τοῦτο, ἐστὶν ὡς ἁ αζ πρὸς δκ δυνάμει, οὕτως ἁ ζβ πρὸς βκ μάκει, τουτέστιν ἁ μν πρὸς νο. ὡς δὲ ἁ μν πρὸς νο μάκει, οὕτως ἁ μν πρὸς νξ δυνάμει. καὶ ὡς ἄρα ἁ αζ πρὸς δκ δυνάμει, οὕτως ἁ μν πρὸς νξ δυνάμει. ὥστε καὶ μάκει ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. καὶ ὡς ἄρα ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δκ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ μν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ νξ κύβον. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δκ κύβον, οὕτω τὸ βαγ τμᾶμα πρὸς τὸ δβε τμᾶμα. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ μν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ νξ κύβον, οὕτως ἁ μν πρὸς ντ. ὥστε καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ὁ αδεγ τομεὺς πρὸς τὸ δβε τμᾶμα, οὕτως ἁ μτ πρὸς ντ, τουτέστι τὰ γ᾽ ε᾽ τᾶς κζ πρὸς ντ. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν, ἔκ τε τᾶς β τᾶς δκ καὶ τᾶς αζ, πρὸς τὸν ἀπὸ αζ κύβον λόγον ἔχει, ὃν ἁ β τᾶς δκ μετὰ τᾶς αζ πρὸς ζα. ὥστε καὶ ἁ β τᾶς νξ μετὰ τᾶς νμ, πρὸς νμ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δκ κύβον, οὕτως ἁ μν πρὸς ντ. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ δκ κύβος πρὸς τὸ στερεὸν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον, τὸ ἀπὸ δκ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς αζ, μετὰ τᾶς δκ, οὕτως ἁ δκ πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς αζ, καὶ τᾶς δκ. ὥστε καὶ ἁ τν πρὸς τὰν συγκειμέναν, ἔκ τε τᾶς β τᾶς ον καὶ τᾶς τν. γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη, τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλᾶς τᾶς δκ, καὶ τᾶς αζ. καὶ ὁ ἀπὸ αζ κύβος, καὶ ὁ ἀπὸ δκ κύβος, καὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δκ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν, ἔκ τε τᾶς β τᾶς αζ, καὶ τᾶς δκ, τέτταρσι μεγέθεσιν ἀνάλογον σὺν δύο λαμβανομένοις, τᾷ τε συγκειμένᾳ ἔκ τε τᾶς β τᾶς νξ, καὶ τᾶς νμ, καὶ ἑτέρου μεγέθεος τᾶς μν. καὶ ἄλλο ἑξῆς ἁ ντ. καὶ τελευταῖον ἁ συγκειμένα, ἔκ τε τᾶς β τᾶς νο, καὶ τᾶς ντ. δι᾽ ἴσου ἄρα γίνεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β τᾶς δκ, καὶ τᾶς αζ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δκ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β τᾶς αζ, καὶ τᾶς δκ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς β τᾶς νξ, καὶ τᾶς μν, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β τᾶς νο, καὶ τᾶς ντ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ εἰρημένον στερεὸν πρὸς τὸ εἰρημένον στερεὸν, οὕτως ἁ θι πρὸς ικ. καὶ ὡς ἄρα ἁ θι πρὸς ικ, οὕτως ἁ συγκειμένα πρὸς τὰν συγκειμέναν. ὥστε καὶ συνθέντι, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ πενταπλάσια. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ ζκ πρὸς ικ, οὕτως ἁ πενταπλᾶ συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τᾶς νξ, νο, πρὸς τὰν β τᾶς ον, καὶ τὰν ντ. καὶ ὡς ἁ ζκ πρὸς ζκ οὖσαι αὐτᾶς δύο πέμπτα, οὕτως ἁ ι συναμφοτέρου τᾶς μντ, καὶ διπλᾶ συναμ-



συναμφοτέρου τᾶς ν ξ ο, πρὸς τὰν β συναμφοτέρου τᾶς μ ν τ, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς ν ξ ο. ἔσται δὴ ὡς ζ κ πρὸς ζ ι, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τᾶς μ ν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τᾶς ξ ν ο πρὸς τὰν συγκειμέναν, ἔκ τε τᾶς β τᾶς μ ν, καὶ δ τᾶς ν ξ, καὶ ς τᾶς ο ν, καὶ γ τᾶς ν τ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνὰ λόγον αἱ μ ν ξ, ο ν τ. καί ἐστιν ὡς μὲν ἡ ν τ πρὸς τ μ, οὕτως ἀλημμένη τις ἡ ρ ι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς ζ κ, τουτέστι τᾶς μ ο. ὡς δὲ ἡ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς β τᾶς ν μ, καὶ δ τᾶς ν ξ, καὶ ς τᾶς ν ο, καὶ γ τᾶς ν τ, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς ε συναμφοτέρου τᾶς μ ν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τᾶς ξ ν ο, οὕτως ἑτέρα τις ἀλημμένα ἡ ι ζ πρὸς τὰν ζ κ, τουτέστιν πρὸς τὴν μ ο, ἔσται δέδεικται πρότερον ἡ ρ ζ δύο πέμπτα τᾶς μ ν. τουτέστι τᾶς ζ β. ὥστε κέντρον βάρεος ἐστὶ τοῦ α β γ τμήματος τὸ ρ σαμεῖον. ἔστω δὴ καὶ τοῦ α δ β ε τμάματος κέντρον βάρεος τὸ χ σαμεῖον. τοῦ α δ ε γ τόμου ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς χ ρ, τὸν αὐτὸν πρὸς αὐτὰν λόγον ἐχούσας, ὃν ἔχει ὁ τομεὺς πρὸς τὸ λοιπὸν τμᾶμα. ἔστι δὲ τὸ ι σαμεῖον. ἐπεὶ γὰρ τᾶς μὲν ζ β τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ β ρ, τᾶς δὲ η β τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ β χ. καὶ λοιπῆς ἄρα τᾶς η ζ, τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ χ ρ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς μὲν ὁ α δ ε γ τομεὺς πρὸς τὸ α δ β ε τμᾶμα, οὕτως ἡ μ τ πρὸς ν τ. ὡς δὲ ἡ μ τ πρὸς τὰν ν τ, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τᾶς η ζ, ἅ τις ἐστὶν ἡ χ ρ πρὸς ρ ι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ α δ ε γ τομεὺς πρὸς τὸ α δ β ε τμᾶμα, οὕτως ἡ χ ρ πρὸς ρ ι. καί ἐστι μὲν τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ρ σαμεῖον, τοῦ δὲ α δ β ε κέντρον βάρεος τὸ χ. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τοῦ α δ ε γ τομέως τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ι σαμεῖον.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΨΑΜΜΙΤΗΣ.

Οἴονταί τινες βασιλεῦ γέλων τοῦ ψάμμου τὸν ἄπειρον εἶμεν τῷ πλήθει. λέγω δὲ οὐ μόνον τοῦ περὶ συρακούσας τε καὶ τὰν ἄλλαν σικελίαν ὑπάρχοντος, ἀλλὰ καὶ τοῦ κατὰ πᾶσαν χώραν ταύταν οἰκημέναν καὶ τὰν ἀοίκητον. ἐντί τινες δὲ αὐτὸν ἄπειρον φαμὲν οὐχ ὑπολαμβάνοντι, μηδένα μέντοι ταλικοῦτον κατωνομασμένον ὑπάρχειν, ὅς τις ὑπερβάλλει τὸ πλῆθος αὐτοῦ. οἱ δὲ οὕτω† δοξάζοντες, δῆλον ὡς εἰ νοήσαιεν ἐκ τοῦ ψάμμου ταλικοῦτον ὄγκον συγκείμενον τὰ μὲν ἄλλα, ἁλίκος ὁ τᾶς γᾶς ὄγκος ἀναπεπληρωμένων ἐν αὐτῷ τῶν τε πελαγέων πάντων, καὶ τῶν κοιλωμάτων τᾶς γᾶς ἴσον ὕψος τοῖς ὑψηλοτάτοις τῶν ὀρέων πολλαπλασίως μὴ γνωσεῖν τινα μηδ' ἕνα ἀριθμὸν ἐμμέναι ὑπερβάλλοντα τὸ πλῆθος αὐτοῦ. ἐγὼ δὲ πειρασοῦμαι τοι δεικνύειν δι' ἀποδείξιων γεωμετρικῶν, αἷς παρακολουθήσεις, ὅτι τῶν ὑφ' ἁμῶν κατωνομασμένων ἀριθμῶν, καὶ ἐνδεδομένων ἐν τοῖς ποτὶ ζεύξιππον γεγραμμένοις, ὑπερβάλλοντι τινὲς οὐ μόνον τὸν ἀριθμὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ γᾷ πεπληρωμένᾳ, καθάπερ εἴπαμεν, ἀλλὰ καὶ τὸν τοῦ μέγεθος ἴσον ἔχοντος τῷ κόσμῳ. κατέχεις δὲ διότι καλεῖται κόσμος ὑπὸ μὲν τῶν πλείστων ἀστρολόγων ἁ σφαῖρα, ἇς ἐστὶ κέντρον μὲν τὸ τᾶς γᾶς κέντρον. ἁ δὲ τοῦ κέντρου εὐθεῖα τᾷ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου, καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς. ταῦτα γὰρ ἐν ταῖς γραφομέναις παρὰ τῶν ἀστρολόγων διακούσας ἀρίσταρχος ὁ σάμιος ὑποθεσίων ἐξέδωκεν γράψας, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου. ὑποτίθεται γὰρ τὰ μὲν ἀπλανῆ τῶν ἄστρων, καὶ τὸν ἅλιον μένειν ἀκίνητον, τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν, ὅς ἐστιν ἐν μέσῳ τῷ δρόμῳ κείμενος, τὰν δὲ τῶν ἀπλανῶν ἄστρων σφαῖραν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ἁλίῳ κειμέναν τῷ μεγέθει ταλικαύταν εἶμεν. ἔστι ὥστε τὸν κύκλον καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, τοιαύταν ἔχειν ἀναλογίαν ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανῶν ἀποστασίαν, οἵαν ἔχει τὸ κέντρον τᾶς σφαίρας ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν. τοῦτο δὲ εὔδηλον, ὡς ἀδύνατον ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ τὸ τᾶς σφαίρας κέντρον οὐδὲν ἔχει μέγεθος, οὐδὲ λόγον ἔχειν οὐδένα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τᾶς σφαίρας ὑπολαπτέον αὐτό. ἐκδεκτέον γὰρ τὸν ἀρίσταρχον διανοεῖσθαι τόδε. ἐπειδὴ τὰν γᾶν ὑπολαμβάνομεν, ὡς περὶ μὲν τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ὃν ἔχει λόγον ἁ γᾶ ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὰν σφαῖραν, ἐν ᾗ ἐστιν ὁ κύκλος καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθενται περιφέρεσθαι ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων σφαῖραν τὰς ἀποδείξιας τῶν φαινομένων οὕτως ὑποκείμενον ἐναρμόζει. καὶ μάλιστα φαίνεται τὸ μέγεθος τᾶς σφαίρας, ἐν ᾇ ποιεῖται τὰν γᾶν κινουμέναν ἴσον ὑποτίθεται τῷ ὑφ' ἁμῶν εἰρημένῳ κόσμῳ. φαμὲν δὴ καὶ εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν. καὶ

† ὅτως

ὄντι ἀεί, δεδείχθαι τῶν ἐν ἀρχαῖς τῶν κατονομαζιδῶν ἐχόντων, ὑπερβάλλοντας τῷ πλήθει τὸν καὶ τοῦ ψάμμου, τοῦ μέγεθος ἔχοντος τὸ ἴσον τᾷ εἰρημένᾳ σφαίρᾳ. ὑποκειμένων τῶνδε, πρῶτον μὲν τὰν περίμετρον τᾶς γᾶς εἶμεν, ὡς τῶν μυριάδων σταδίων καὶ μείζων, καὶ περὶ τῶν πειραμένων ἀποδεικνύειν, καθὼς καὶ τὺ παρακολουθεῖς ἐοῦσαν αὐτάν, ὡς λ̄ μυριάδων σταδίων. ἐγὼ δ' ὑπερβαλλόμενος καθὼς τὸ μέγεθος τᾶς γᾶς ὡς δεκαπλάσιον τῶν ὑπὸ τῶν προτέρων δεδοξασμένων, τὰν περίμετρον αὐτᾶς ὑποτίθεμαι εἶμεν, ὡς τῶν λ λ σταδίων, καὶ μὴ μείζων. μετὰ δὲ ταῦτα τὰν διάμετρον τᾶς γᾶς μείζονα εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας. καὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ὁμοίως τὰ αὐτὰ λαμβάνων τοῖς πλείστοις τῶν προτέρων ἀστρολόγων. μετὰ δὲ ταῦτα τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, ὡς τριακονταπλασίαν εἶμεν, καὶ μὴ μείζονα. καὶ περὶ τῶν προτέρων ἀστρολόγων Εὔδοξος μὲν, ὡς ἐννεαπλάσιον ἀπεφαίνετο. Φειδίας δὲ τοῦ Ἀκούπατρος, ὡς δὲ δωδεκαπλασίαν. Ἀρίσταρχος δὲ ἐπειράθη δεικνύειν, ὅτι ἐστὶν ἁ διάμετρος ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, μείζων μὲν ἢ ὀκτωκαιδεκαπλασίων, ἐλάττων δὲ ἢ εἰκοσαπλασίων. ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλόμενος καὶ τοῦτον, ὅπως τὸ ὑποκείμενον ἀμφιλόγως ᾖ δεδειγμένον, ὑποτίθεμαι τὰν διάμετρον τᾶς σελήνας, ὡς τριακονταπλασίας εἶμεν, καὶ μὴ μείζονα. ποτὶ δὲ τούτοις τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. τοῦτο δὲ ὑποτίθεμαι, Ἀριστάρχου μὲν εὑρηκότος τοῦ κύκλου τοῦ ζωδίων τὸν ἅλιον φαινόμενον, ὡς τὸ εἰκοστὸν καὶ ἑπτακοσιοστόν. αὐτὸς δὲ ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον ἐπειράθην ὀργανικῶς λαβεῖν τὰν γωνίαν ἐς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσα ποτὶ τᾷ ὄψει, τὸ μὲν ὅμοιον ἀκριβεῖ λαβεῖν οὐκ εὐχερές ἐστι, διὰ τὸ μήτε τὰν ὄψιν, μήτε τὰς χεῖρας μήτε τὰ ὄργανα, δι' ὧν λαβεῖν ἀξιόπιστα εἶμεν τὸ ἀκριβὲς ἀποφαίνεσθαι. περὶ δὲ τούτων ἐπὶ τοῦ παρόντος οὐκ εὔκαιρον μακύνειν, ἄλλως τε καὶ πλεονάκις τοιούτων ἐμπεφανισμένων. ἀπόχρη δέ μοι ἐς τὰν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου γωνίαν λαβεῖν, ἅ τις ἐστὶ μείζων τᾶς γωνίας εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, καὶ πάλιν ἄλλαν γωνίαν λαβεῖν, ἅ τις ἐστὶν οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας ἐς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν, ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. τεθέντος οὖν μακροῦ κανόνος ἐπὶ πεδίου ὀρθοῦ ἐν τόπῳ κειμένου, ὅθεν ἤμελλεν ἀνατέλλων ὁ ἅλιος ὁρᾶσθαι, καὶ κυλίνδρου μικροῦ τορνευθέντος, καὶ τεθέντος ἐπὶ τὸν κανόνα ὀρθοῦ εὐθέως μετὰ τὰν ἀνατολὰν τοῦ ἁλίου. ἔπειτ' ἰόντος αὐτοῦ ποτὶ τῷ ὁρίζοντι, καὶ δυναμένου τοῦ ἀντιβλέπεσθαι ἐπεστράφη ὁ κανὼν ἐς τὸν ἅλιον, καὶ ἁ ὄψις κατεστάθη ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος. ὁ δὲ κύλινδρος ἐν μέσῳ κείμενος τοῦ τε ἁλίου καὶ τᾶς ὄψιος, ἐπεσκότει τῷ ἁλίῳ, ἀποχωριζόμενος τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος ἐν ᾧ ἄρξατο παραφαίνεσθαι τοῦ ἁλίου μικρὸν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου κατεστάθη ὁ κύλινδρος, εἰ μὲν ὁμοίως συνέβαινεν τὰν ὄψιν ἀφ' ἑνὸς σαμείου βλέπειν, εὐθεῖαν ἀχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ ἄκρου τοῦ κανόνος ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη ἐπιψαύουσα τοῦ κυλίνδρου, ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐλάσσων κα εἴη τᾶς γωνίας, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, διὰ τὸ παραβλέπεσθαί τι τοῦ ἁλίου ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ δ' αἱ ὄψιες οὐκ ἀφ' ἑνὸς σαμείου βλέποντι, ἀλλὰ ἀπό τινος μεγέθεος, ἐλάφθη τι μέγεθος στρογγύλον, οὐκ ἔλασσον ὄψιος. καὶ τεθέντος τοῦ μεγέθεος ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἐπιψαύουσα τοῦ μεγέθεος καὶ τοῦ κυλίνδρου. ἁ οὖν περιεχομένα γωνία ὑπὸ τὰν ἀχθεῖσαν ἐλάσσων ἦς τᾶς γωνίας, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσας ποτὶ τᾷ ὄψει. τὸ δὲ μέγεθος τὸ οὐκ ἔλασσον ὄψιος, τόνδε τὸν τρόπον εὑρίσκεται· δύο κύλινδρα ἀναλαμβάνεται λεπτὰ ἰσοπαχέα ἀλλήλοις, τὸ μὲν λευκόν, τὸ δὲ οὔ. καὶ προτίθενται πρὸς τὰς ὄψιας, τὸ μὲν λευκὸν ἀφεστακὸς ἀπ' αὐτᾶς, τὸ δὲ οὐ λευκὸν ὅσον ἐστὶν ἐγγυτάτω τᾶς ὄψιος, ὥστε καὶ θιγγάνειν τοῦ προσώπου. εἰ μὲν οὖν τὰ λαφθέντα κυλίνδρια λεπτότερα ἐόντι τᾶς ὄψιος, περιλαμβάνεται ὑπὸ τᾶς ὄψιος τὸ ἐγγὺς κυλίνδριον, καὶ ὁρῆται ὑπὸ αὐτᾶς τὸ λευκὸν ἀκόνα παραπολὺ λεπτότερα ἐόντα, εἰ δὲ κα μὴ παραπολὺ, μέρεα τινὰ τοῦ λευκοῦ ὁρῶνται ἀφ' ἑκάτερα τᾶς ἐγγὺς τᾶς ὄψιος. λαφθέντων δὲ τῶνδε τῶν κυλίνδρων, ἔπειτα δὲ ὧν πῶς τῷ πάχει ἐπισκοτεῖ τὸ ἕτερον αὐτῶν τῷ ἑτέρῳ, καὶ οὐ πλείονι τόπῳ, τὸ δὲ τηλικοῦτον μέγεθος ἁλίκον ἐστὶ τὸ πάχος τῶν κυλίνδρων τῶν τοιούτων ποιούντων μάλιστα πῶς ἐστὶν οὐκ ἔλαττον τᾶς ὄψιος, ἡ δὲ γωνία, οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. οὕτως ἐλάφθη ἀποσταθέντος ἐπὶ τοῦ κανόνος τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος οὕτως ὡς ἐπισκοτεῖν τὸν κύλινδρον ὅλῳ ἁλίῳ, καὶ ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη, ἐπιψαυουσᾶν τοῦ κυλίνδρου ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν οὐκ ἐλάττων γίνεται τᾶς γωνίας, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει.

ταῖς δὴ γωνίαις ταῖς οὕτως λαφθείσαις καταμετρηθείσας ὀρθᾶς γωνίας ἐγγίζει ἁ ἐν στιγμᾷ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς ρξδ ἐλάσσων ἢ ἓν μέρος τούτων. ἁ δὲ ἐλάσσων διαιρεθεῖσα τῶν ὀρθῶν εἰς σ, μείζων ἢ ἓν μέρος τούτων. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ γωνία ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, ἐλάσσων μέν ἐστιν, ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς, εἰς ρξδ. τούτων ἓν μέρος μείζων δέ, ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, τούτων ἓν μέρος. πεπιστευμένων δὴ τούτων δείκνυται, ὅτι καὶ ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγωνίου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τᾶς ἐν τῷ κόσμῳ. νοείσθω γὰρ ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διά τε τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς, καὶ διὰ τᾶς ὄψιος, μικρὸν ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἐόντος τοῦ ἁλίου. τεμνέτω δὲ τὸ ἐκβεβλαθὲν ἐπίπεδον, τὸν μὲν κόσμον κατὰ τὸν αβγ κύκλον, τὰν δὲ γᾶν κατὰ τὸν δεζ. τὸν δὲ ἅλιον κατὰ τὸν σκ κύκλον. κέντρον δὲ ἔστω τᾶς μὲν γᾶς τὸ θ, τοῦ δὲ ἁλίου τὸ κ, ὄψις δὲ ἔστω τὸ δ. καὶ ἄχθωσαν εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ σκ κύκλου. ἀπὸ μὲν τοῦ δ αἱ δλ, δξ. ἐπιψαυόντων δέ, κατὰ τὸ ν καὶ τὸ τ. ἀπὸ δὲ τοῦ θ, αἱ θμ, θο. ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ χ καὶ τὸ ρ. τὸν δὲ αβγ κύκλον τεμνόντων αἱ θμ, θο κατὰ τὸ α καὶ τὸ β. ἐστὶ δὴ μείζων ἁ θκ τᾶς δκ, ἐπεὶ ὑπόκειται ὁ ἅλιος ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα εἶμεν, ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δλ, δξ μείζων ἐστὶ τᾶς γωνίας τᾶς περιεχομένας ὑπὸ τῶν θμ, θο. ἁ δὲ περιεχομένα



γωνία ὑπὸ τῶν δλ, δξ, μείζων μέν ἐστιν ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς. ἐλάσσων δέ, ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ. τούτων ἓν μέρος, ἴσον γωνίαι ἐστὶ τᾷ γωνίᾳ, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν θμ, θο ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ, τούτων ἓν μέρος. ἁ δὲ αβ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας ἓν τμᾶμα διαιρεθείσας τᾶς τοῦ αβγ κύκλου περιφερείας εἰς χνϛ. ἁ δὲ τοῦ εἰρημένου πολυγωνίου περίμετρος ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβγ κύκλου, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ μδ ποτὶ τὰ ζ. διὰ τὸ παντὸς πολυγωνίου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τὰν περίμετρον ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὰ μδ ποτὶ τὰ ζ. ἐπίστασαι γὰρ δεδειγμένον ὑφ᾽ ἁμῶν, ὅτι παντὸς κύκλου ἁ περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου, ἐλάσσονι ἢ ἑβδόμῳ μέρει, τᾶς δὲ ἐλάσσω λόγον ἔχει, ἢ ἁ βα ποτὶ τὰν θκ. ἢ τὰ ια ποτὶ τὰ αρμη. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἁ βα τᾶς θκ, ἢ ἑκατοστὸν μέρος. τᾷ δὲ βα ἴσα ἐστὶν ἁ διάμετρος τοῦ σκ κύκλου. διότι καὶ ἁ ἡμίσεα αὐτᾶς ἁ φα, ἴσα ἐστὶ τᾷ κρ, ἴσαν γὰρ ἐοῦσαν τᾶν θκ, τᾷ θα, ἀπὸ τῶν περάτων κάθετοι ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰν

αὐτὴ ἡ γωνία ἴσα τᾷ γωνίᾳ

ταὶ αὐτὰν γωνίαν. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ διάμετρος τοῦ αβγ κύκλου ἐλάττων ἐστὶν ἢ ἑκατοστὸν μέρος τᾶς θκ. καὶ ἁ θυ γωνία ἐλάττων ἐστὶ τᾶς διαμέτρου τοῦ αβγ κύκλου, ἐπεὶ ἐλάττων ἐστὶν ὁ δεζ κύκλος τοῦ αβγ κύκλου. ἐλάττονες ἄρα ἐντὶ ἀμφότεραι αἱ θυ, κσ, ἢ ἑκατοστὸν μέρος τᾶς θκ. ὥστε ἁ θκ ποτὶ τὰν υσ ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. καὶ ἐπεὶ ἁ μὲν θκ ἐλάττων ἐστὶ τᾶς θρ, ἁ δὲ σν ἐλάττων τᾶς δτ, ἐλάττω ἄρα καὶ λόγον ἔχει ἁ θρ ποτὶ τὰν δτ, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ, ἐπεὶ τῶν θκρ, δκτ τριγώνων ὀρθογωνίων ἐόντων, αἱ μὲν κρ, κτ πλευραὶ ἴσαι ἐντί. αἱ δὲ θρ, δτ ἄνισοι. καὶ μείζων ἁ ορα γωνία περιεχομένα ὑπὸ τῶν δτ, δκ, ποτὶ ταὶ γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θρ, θκ, μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ θκ ποτὶ τὰν δκ. ἐλάττω δὲ, ἢ ἁ θρ ποτὶ τὰν δτ. εἰ γὰρ κα δυοῖν τριγώνων ὀρθογωνίων αἱ μὲν ἅτεραι πλευραὶ αἱ περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ἴσαι ἐῶντι, αἱ δὲ ἅτεραι ἄνισοι, ἁ μείζων γωνία ταῖν ποτὶ ταῖς ἀνίσοις πλευραῖς ποτὶ τὰν ἐλάττονα, μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ μείζων γραμμὰ, τᾶν ὑπὸ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτεινουσᾶν, ποτὶ τὰν ἐλάττονα. ἐλάττονα δὲ, ἢ ἁ μείζων γραμμὰ ταῖν περὶ ταὶ ὀρθαὶ γωνίαν ποτὶ ταὶ ἐλάσσονα. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δλ, δξ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θν, θμ, ἐλάττω λόγον ἔχει, ἢ ἁ θρ ποτὶ ταὶ δτ. ἅ περ ἐλάττω λόγον ἔχει, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν δλ, δξ, ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τᾶν θμ, θο, ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν δλ, δξ μείζων ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς, εἴη κα ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν θμ, θο μείζων, ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς δισμύρια τούτων ϙθ μέρος, ὥστε μείζων ἐστὶν ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, καὶ γ. τούτων ἓν μέρος ἄρα ἁ βα μείζων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας, ἓν τμᾶμα διῃρημένας τᾶς τοῦ αβγ κύκλου περιφερείας, εἰς αιβ, τὰν δὲ αβ ἴσα ἐντὶ ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος. δῆλον οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων, δείκνυται καὶ τάδε, οἷον ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων, καὶ ἔτι ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις, μυριάδες ρ. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μὴ μείζων εἶμεν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, τὰν δὲ διάμετρον τᾶς γᾶς μείζων εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, δῆλον ὡς ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. πάλιν δὲ ἐπεὶ ἐδείχθη ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, φανερὸν ὅτι ἁ τοῦ χιλιαγώνου περίμετρος τοῦ εἰρημένου ἐλάττων ἐστὶν ἢ χιλιοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ ἁλίου. ἁ δὲ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ὥστε ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου ἐλάττων ἐστὶν, ἢ τρισμυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἐπεὶ οὖν ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου, τᾶς μὲν διαμέτρου τᾶς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν, ἢ τρισμυριοπλασίων, τᾶς δὲ διαμέτρου τοῦ κόσμου μείζων ἢ τριπλασίων. δέδεικται γάρ τοι, διότι παντὸς κύκλου ἁ διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν, ἢ τρίτον μέρος παντὸς πολυγωνίου περιμέτρου, ὅκα ἐς ὁ εθ πλεύρον, καὶ πολυγώνου, ὅτι τοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου μὲν τοῦ κύκλου ἐν, καὶ ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἁ μὲν οὖν διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἐοῦσα, ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου, ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ, ἐκ τούτου δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται, τὸν περίμετρον τᾶς γᾶς μὴ μείζονα εἶμεν, ἢ τριακοσίας μυριάδας σταδίων ἐστίν. ἁ δὲ περίμετρος τᾶς γᾶς, μείζων ἐστὶ τριπλασία τᾶς διαμέτρου, διὰ τὸ παντὸς κύκλου τὰν περιφέρειαν μείζονα εἶμεν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου, δῆλον ἁ διάμετρος τᾶς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων ρ μυριάδων. ἐπεὶ οὖν ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, δῆλον ὡς ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ. περὶ μεγεθέων καὶ τῶν ἀποστημάτων ταῦτα ὑποτίθεμαι. περὶ δὲ τοῦ ψάμμου τάδε. εἴ κα ᾖ τι συγκείμενον μέγεθος ἐκ τοῦ ψάμμου, μὴ μείζων μάκωνος, τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, καὶ τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάττονα εἶμεν ἢ τετρωκοστὸν μόριον δακτύλου. ὑποτίθεμαι δὲ τοῦτο, ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον. ἐτέθην ἐπὶ κανόνα λεῖον μάκωνας ἐπ' εὐθείας ἐπὶ μίαν κειμένας, ἁπτομένας ἀλλάλων. καὶ ἀνέλαβον αἱ κε μάκωνες πλέονα τόπον δακτυλιαίου μάκεος. ἐλάττονα θεὶς τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος, ὑποτίθεμαι ὡς τετρωκοστημόριον εἶμεν δακτύλου, καὶ μὴ ἐλάττονα βουλόμενος καὶ διὰ τούτων ἀναμφιλογώτατον δείκνυσθαι τὸ προκείμενον. ἃ μὲν οὖν ὑποτίθεμαι, ταῦτα. χρήσιμον δὲ εἶμεν ὑπολαμβάνω τὰν κατονόμαξιν τῶν ἀριθμῶν ῥηθῆμεν, ὅπως καὶ τῶν ἄλλων ἐν τῷ βιβλίῳ μὴ περιτυχόντες τῷ ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένῳ μὴ πλανῶνται, διὰ τὸ μηδὲν εἶμεν

ὑπὲρ αὐτᾶς ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ περὶ εἰρημένων. συμβαίνει δὲ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν ἐς τὸ μὲν τῶν μυρίων ὑπάρχειν ἁμῖν παραδεδομένα, καὶ ὑπὲρ τῶν μυρίων μὲν ἀποχρεόντως γιγνώσκομεν, μυριάδων ἀριθμὸν λέγοντες ἐς τὰς μυρίας μυριάδας. ἔστων οὖν ἁμῖν, οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἐς τὰς μυρίας μυριάδας πρῶτοι καλούμενοι. τῶν δὲ πρώτων ἀριθμῶν αἱ μυρίαι μυριάδες μονὰς καλείσθω δευτέρων καὶ ἀριθμείσθων τῶν δευτέρων μονάδες, καὶ ἐκ τᾶν μονάδων δεκάδες, καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες, καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας μυριάδας. πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, μονὰς καλείσθω τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθων τῶν τρίων ἀριθμῶν μονάδες καὶ αἱ ἀπὸ τᾶν μονάδων δεκάδες, καὶ ἑκατοντάδες, καὶ χιλιάδες, καὶ μυριάδες, ἐς τὰς μυρίας μυριάδας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τῶν τρίτων ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες μονὰς καλείσθω τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ αἱ τῶν τετάρτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω πέμπτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως προάγοντες οἱ ἀριθμοὶ τὰ ὀνόματα ἔχοντες ἔστων ἐς τὰς μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας. ἀποχρέοντι μὲν οὖν καὶ ἐπὶ τοσοῦτον οἱ ἀριθμοὶ γιγνωσκόμενοι. ἔξεστι δὲ καὶ ἐπὶ πλέον προάγειν. ἔστων γὰρ οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ πρώτας περιόδου καλούμενοι, ὁ δὲ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς περιόδου μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ αἱ μυρίαι μυριάδες τᾶς δευτέρας περιόδου δευτέρων ἀριθμῶν. ὁμοίως δὲ καὶ τούτων ὁ ἔσχατος μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἀεὶ οὕτως οἱ ἀριθμοὶ προάγοντες, τὰ ὀνόματα ἐχόντων τᾶς δευτέρας περιόδου, ἔστε μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδες. πάλιν δὲ καὶ ὁ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς δευτέρας περιόδου μονὰς καλείσθω τρίτας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. καὶ ἀεὶ οὕτως προαγόντων ἔστε μυριάκις μυριοστᾶς περιόδου μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδες. τούτων δὲ οὕτως κατωνομασμένων, εἴκα ἐόντι ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἑξῆς κείμενοι, ὁ δὲ παρὰ τὰν μονάδα δεκὰς ᾖ, οἱ ὀκτὼ μὲν αὐτῶν, οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων ἀριθμῶν καλουμένων ἐσσοῦνται. οἱ δὲ μετ' αὐτοὺς ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων καλούμενοι, καὶ οἱ ἄλλοι τὸν αὐτὸν τρόπον τούτοις τῶν συνωνύμων καλουμένων ἐσσοῦνται ἀποστάσει τᾶς ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν. ἁ μὲν οὖν πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ὄγδοος ἐστὶν ἀριθμὸς χίλιαι μυριάδες. τᾶς δὲ δευτέρας ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ μυρίαι μυριάδες ἐσσεῖται. οὗτος δὲ ἐστὶ μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ὁ δὲ ὄγδοος τᾶς δευτέρας ὀκτάδος ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ τᾶς τρίτας ὀκτάδος, ὁ πρῶτος. ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ μυρίαι μυριάδες ἐσσεῖται τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. οὗτος δὲ ἐστὶ μονὰς τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν δέ, ὅτι πολλαὶ ὀκτάδες ἕξοντι ὡς εἴρηται. χρήσιμον δὲ ἐστὶ καὶ τόδε γιγνωσκόμενον. εἴκα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζοντές τινες ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὅταν ὁμοίως ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων. ἀπὸ μὲν οὖν τοῦ πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσους ὁ ἐλάσσων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἀπέχει. ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλάσσονας, ἢ ὅσος ἐστὶν ἀριθμὸς συναμφοτέρων, ὡς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. ἔστων γὰρ ἀριθμοί τινες ἀνὰ λόγον ἀπὸ μονάδος, οἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ. μονὰς δὲ ἔστω ὁ α, καὶ πεπολλαπλασιάσθω ὁ δ τῷ θ. ὁ δὲ γενόμενος ἔστω ὁ χ. λ. εἰλάφθω δὴ ὁ λ ἐκ τᾶς ἀναλογίας ὁ φ λ, ἀπέχων ἀπὸ τοῦ θ τοσούτους, ὅσους ὁ δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. δεικτέον ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ χ τῷ λ. ἐπεὶ οὖν ἀνάλογον ἐόντων ἴσον ἴσους ἀπέχει ὅτι δ ἀπὸ τοῦ α, καὶ ὁ λ ἀπὸ τοῦ θ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὁ δ ποτὶ τὸν α, ὃν ὁ λ ποτὶ τὸν θ. πολλαπλασίων δὲ ἐστὶν ὁ δ τοῦ α, τῷ δ. πολλαπλασίων ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ λ τοῦ θ τῷ δ. ὥστε ἴσος ἐστὶν ὁ λ τῷ χ. δῆλον οὖν ὅτι γενόμενος ἐκ τᾶς ἀναλογίας τέ ἐστι καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους ἴσον ἀπέχων, ὅσους ὁ ἐλάσσων ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀπέχει. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει ἑνὶ ἐλάσσονας ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ τᾶς μονάδος. οἱ δὲ μὲν γὰρ οἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, τοσοῦτοι ἐντὶ ὅσους ὁ θ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει, οἱ δὲ ι κ λ τῶν ἐλάσσονες, ἢ ὅσους ὁ δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. σὺν γὰρ τῷ θ, τοσοῦτοι ἐντί.

Τούτων δὲ τῶν μὲν ὑποκειμένων, τῶν δὲ ἀποδεδειγμένων τὸ προκείμενον δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν, ἢ τετρακοσιομόριον δακτύλου, δῆλον ὡς ἁ σφαῖρα δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον, οὐ μείζων ἐστὶν, ἢ ὥστε χωρεῖν μάκωνας ἑξακισμυρίας καὶ τετρακισχιλίας. τᾶς γὰρ σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον τετρακοσιομόριον δακτύλου πολλαπλασία ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ ἀριθμῷ. δέδεικται γὰρ ὅτι αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτὶ ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται καὶ τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμόν, εἰς τὸ τᾶς μάκωνος μέγεθος, μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων. δῆλον ὡς εἰ πληρωθείη ψάμμου ἁ σφαῖρα ἁ δακτυλιαίαν

ἔχουσα

ἔχουσα τὰν διάμετρον, ὁ μείζων κα εἴη ὁ ἀριθμὸς τοῦ ψάμμου ἢ μυριάκις τὰ ἑξακισμύρια καὶ τετρακισχίλια. οὗτος δέ ἐστιν ὁ ἀριθμὸς, μονάδες τε ἀριθμὸς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ τῶν πρώτων μυριάδες τετρακισχίλιαι. ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἢ ῑ μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τᾶν ρ̄ δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς δακτυλιαίας ἐχούσας τὸν διάμετρον ἐφα ταῖς ρ̄ μυριάδεσσι, διὰ τὸ τριπλάσιον ἔχειν ποτ' ἀλλάλας τὰν διάμετρον τᾶς σφαίρας. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα δή ἐστιν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον δακτύλων ρ̄, δῆλον ὡς ἐλάττων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν δεκαμονάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δὲ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν δέκα μονάδες, δέκατος δή ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ὄντων τῶν δέκα πλευρῶν ὀρθῶν ἀνάλογον. αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἑκτὸς ἐσσεῖται τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἑκκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος. δέδεικται γὰρ ὅτι γὰ ἐλάσσονας ἀπὸ τᾶς μονάδος ἄσσος ἐστὶν ἐλάττων συνάμφω δὲ ὃς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. τῶν δὲ ἑκκαίδεκα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρᾶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ ὁ ἔσχατος δή ἐστιν αὐτῶν χίλιαι μυριάδες ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τε τὰν διάμετρον ρ̄ δακτύλων ἐχούσῃ, ἐλάττων δή ἐστιν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ ἁ σφαῖρα, ἁ τῶν μυρίων δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον πολλαπλασία τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον ρ̄ δακτύλων ταῖς ρ̄ μυριάδεσσι. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαῦτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα δή ἐστιν ἁ ἔχουσα σφαῖρα τὰν διάμετρον μυριάδων δακτύλων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου πολλαπλασιασθεισᾶν ταύχιαν μυριάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. ἐπειδὴ αἱ μὲν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες ἑκκαιδέκατος δή ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος, ἀναλογίας δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος, ἀπὸ μονάδος ἐν τᾷ αὐτᾷ ἀναλογίᾳ, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται δύο καὶ εἰκοστὸς τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ δύο καὶ εἴκοσι τούτων, ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐστίν. ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τοὺς δευτέρων καλουμένων. οἱ δὲ λοιποὶ ἐκ τῶν τριῶν καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ μυρίων δακτύλων, ἔλασσόν ἐστιν ἢ ῑ μυριάδες τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἁ σταδιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα, τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον μυρίων δακτύλων, δῆλον ὅτι καὶ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδιαίαν, ἔλασσόν ἐστιν ἢ ῑ μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ̄ σταδίων, πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδιαίαν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαῦτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ̄ σταδίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ, πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν δέκα μυριάδων τρίτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν τρίτων ἀριθμῶν δέκα μυριάδες δύο καὶ εἰκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ὀκτὼ καὶ εἰκοστὸς ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος, τῶν δὲ ὀκτὼ καὶ εἴκοσι τούτων, ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν τρίτων, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν τετάρτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ̄, ἔλασσόν ἐστιν ἢ χίλιαι μονάδες. τῶν δὲ τετάρτων ἀριθμῶν, πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον μυρίων σταδίων, πολλαπλασία δή ἐστι τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ̄, ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαῦτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυρίων, δῆλον ὅτι ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλίων μονάδων τῶν τετάρτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τῶν τετάρτων ἀριθμῶν χίλιαι μονάδες ὀκτὼ καὶ εἰκοστός ἐστιν, ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον. αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, τέταρτος καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσάρων καὶ τριάκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ, τῶν

τετάρτων. οἱ δὲ λοιποὶ δύο τῶν πέμπτων καλουμένων ἐσσοῦνται. καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. δῆλον οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυρίων, ἐλάσσων ἐσσεῖται ἢ ι̅ μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ̄ μυριάδων πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς διάμετρον ἐχούσας σταδίων μυρίων, ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ̄ μυριάδων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γινομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίας θείσας τᾶν δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν δέκα μονάδες, τέταρτος ἐστὶ καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γινόμενος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἐσσεῖται τετρωκοστὸς ἀπὸ μονάδος, τῶν δὲ τεσσαράκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί. οἱ δὲ μετὰ ταῦτα ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ὀκτὼ τῶν τετάρτων. οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων καλουμένων. καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ̄ μυριάδες, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριὰς μυριάδων πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ̄ μυριάδων ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. εἰ δὲ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριὰς μυριάδων, φανερὸν ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γινομένου ἀριθμοῦ πολλαπλάσιον χιλίαν μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάσιν. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες τετρακοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γινόμενος ἐσσεῖται ἕκτος καὶ τετρακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσαράκοντα καὶ ἓξ τούτων εἰμὲν, οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τούτους τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τετάρτων, καὶ οἱ μετὰ τοὺς τετάρτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων, οἱ δὲ λοιποὶ τῶν ἑκτῶν καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτός ἐστι ι̅ μυριάδων τῶν ἑκτῶν ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων μυρίων ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ι̅ μυριάδες τῶν ἑκτῶν ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̄, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων μυριάδας μυρίας, ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριάκις μυριάδων, φανερὸν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος ἔλασσον ἐσσεῖται τοῦ γινομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίων τᾶν ι̅ μυριάδων, τῶν ἑκτῶν ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσ. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τῶν ἑκτῶν ἀριθμῶν δέκα μυριάδες ἕκτος καὶ τεσσαρακοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γινόμενος ἐσσεῖται δύο καὶ πεντηκοστὸς ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. τῶν δὲ δύο καὶ πεντήκοντα τούτων, οἱ μὲν ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα σὺν τᾷ μονάδι, οἵ τε πρῶτοι καλούμενοι ἐντὶ καὶ οἱ δεύτεροι καὶ τρίτοι καὶ τέταρτοι καὶ πέμπτοι καὶ ἕκτοι. οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν ἑβδόμων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσα τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὸν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̄, ἔλασσόν ἐστιν, ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐοῦσα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̄, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ, ἔλασσόν ἐστιν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ὅτι μὲν ὁμοίως τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρολόγων καλουμένῳ κόσμῳ, ἔλασσόν ἐστιν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν, δέδεικται. ὅτι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τηλικαύτᾳ, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, ἅμεν ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ͵α μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν, δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν γᾶν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, ὃν ἔχει λόγον ὁ εἰρημένος κόσμος ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, ἃν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται. καὶ αἱ διάμετροι τᾶν σφαιρᾶν τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτὶ ἀλλάλας. ἁ δὲ τοῦ κόσμου διάμετρος τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς δέδεικται ἐλάσσων ἐοῦσα ἢ μυριοπλασίων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ἁ διάμετρος τᾶς τῶν ἀπλανέων ἄστρων

σφαίρας

σφαίρας ἔλασσον δεῖν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου. ἐπειδὴ αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων φανερόν, ὅτι ἁ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖρα ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἐλάσσων δεῖν ἢ μυριάκις μυριάδεσσι πολλαπλασίων τοῦ κόσμου. δέδεικται γὰρ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ, ἐλάσσων δεῖν ἢ α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. δῆλον οὖν ὅτι εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαῦτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν ὁ Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν, ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίων τᾶν χιλίων μονάδων, ταῖς μυριάκις μυρίαις μυριάδεσσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν ἑβδόμων α μονάδες δύο καὶ πεντηκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος. ἀνάλογον δὲ μυριάκις μύριαι μυριάδες τρισκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας δῆλον, ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται τέταρτος καὶ ἑξηκοστὸς ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. οὗτος δὲ ἐστὶ τῶν ὀγδόων ὄγδοος καὶ πεντακισχίλιαι μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. φανερὸν τοίνυν, ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρᾳ ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἔλασσον δεῖν ἢ α μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. ταῦτα δὲ βασιλεῦ Γέλων, τοῖς μὲν πολλοῖς καὶ μὴ κεκοινωνηκόσι τῶν μαθημάτων οὐκ εὔπιστα φανήσειν ὑπολαμβάνω, τοῖς δὲ μεταλελαβηκόσι καὶ περὶ τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγεθέων τᾶς τε γᾶς καὶ τοῦ ἁλίου, καὶ τᾶς σελήνας καὶ τοῦ ὅλου κόσμου πεφροντικόσι πιστά, διὰ τὰν ἀπόδειξιν ἐσσεῖσθαι. διόπερ ᾠήθην κἀ τινας οὐκ ἀνάρμοστον εἶν ἔτι ἐπιθεωρῆσαι ταῦτα.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ.

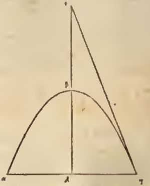
ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΟΣΙΘΕΩ ΕΥΠΡΑΤΤΕΙΝ.

Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν ἐλλείπων οὐδὲν ἐν φιλίᾳ, τινὰ δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν, τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἐμπλάθημεν, ὡς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γενομένου, καὶ ἐν τοῖς μαθήμασι θαυμαστοῦ τινός. ἐπεχειρίξαμεθα δὲ ἀποστεῖλαι, γράψαντες ὡς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες εἶμεν γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον. νῦν δὲ ὑφ' ὑμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὑρεθέν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν, τῶν μὲν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχείρησαν τινὲς γράφειν, ὡς δυνατὸν ἐὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι, καὶ κύκλου τμήματι τῷ δοθέντι χωρίον εὑρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον. καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο, λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, ὅπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν πλείστων οὐκ εὑρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθη, τὸ καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμῆμα περιεχόμενον, οὐδένα τῶν πρώτων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ὑμῶν εὕρηται. δείκνυται γὰρ ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτον ἐστὶ τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτάν, καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμήματι, λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος εἰς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. κέχρηνται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι. τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλους τῶν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τῷ λήμματι χρώμενοι. καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι πρὸς ἀλλήλας τᾶν διαμέτρων. ἔτι δὲ καὶ πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι, καὶ ὕψος ἴσον. καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ὁμοίως τῷ προκειμένῳ λήμματι λαμβάνοντες ἔγραφον. συμβαίνει τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τοῦ τούτου λήμματος, ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι. ἀρτὶ δὲ εἰς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτοις ἀναγμένον τὸ ὑφ' ἡμῶν ἐκδιδομένων. ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξεις, ἀποστέλλομεν πρῶτον μέν, ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη. μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰν ἀπόδειξιν. ἔρρωσο.

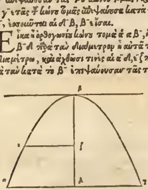


α΄ Εἴκα ἢ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ β΄γ, ἦ δὲ ἁ μὲν β΄δ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος. ἁ δὲ αδ΄γ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β΄, ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ β΄, ἐσσοῦνται αἱ α΄δ, δ΄γ ἴσαι.

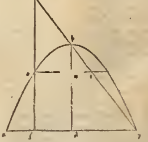
β΄ Εἴκα ἢ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α΄β, ἦ δὲ ἁ β΄δ παρὰ τὰν διάμετρον, ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ αδ΄γ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β΄ ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, καὶ ἁ γ΄ε τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύοισα κατὰ τὸ γ΄, ἐσσοῦνται αἱ δ΄β, β΄ε ἴσαι.



γ΄ Εἴκα ἢ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ αβ΄, ἦ δὲ β΄δ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ τὰ διάμετρος, καὶ ἀχθῶσι τινὲς αἱ α΄δ, ε΄ζ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β΄ ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ

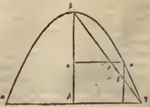


κώνου τομᾶς, ἐσσεῖται ὡς ἁ β΄δ μάκει ποτὶ τὰν β΄ζ, οὕτως δυνάμει ἁ α΄δ ποτὶ τὰν ε΄ζ. ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.



δ΄ Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ αβ΄γ. ἁ δὲ β΄δ ἀπὸ μέσας τᾶς α΄γ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθω, ἢ αὐτὰ διάμετρος ἔστω, καὶ ἁ β΄γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. εἰ δή κα ταχθέη τις ἄλλα ἁ ζ΄θ παρὰ τὰν β΄δ τέμνουσαν, τὰν δὲ τῶν α΄γ εὐθειῶν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ζ΄θ ποτὶ τὰν θ΄η, ὃν ἁ δ΄α ποτὶ τὰν δ΄ζ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ κ΄ παρὰ τὰν α΄γ ἁ κ΄η. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ β΄δ ποτὶ τὰν β΄κ μάκει, οὕτως ἁ δ΄γ ποτὶ τὰν κ΄η δυνάμει. ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐσσεῖται ἄρα ὡς ἁ β΄γ ποτὶ τὰν β΄ι μάκει, οὕτως ἁ β΄γ ποτὶ τὰν β΄θ δυνάμει. ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ β΄γ ποτὶ τὰν β΄θ, ὃν ἁ γ΄θ ποτὶ τὰν θ΄ι. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ΄δ ποτὶ τὰν δ΄ζ, οὕτως ἁ θ΄ζ ποτὶ τὰν θ΄η. τᾷ δὲ δ΄γ ἴσα ἐστὶν ἁ δ΄α. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ δ΄α ποτὶ τὰν δ΄ζ, ὃν ἁ ζ΄θ ποτὶ τὰν θ΄η.

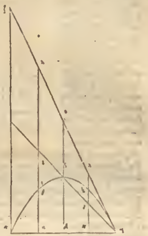
τέμνουσα ἑκατέραν τᾶν αγ β εὐθεῖαν



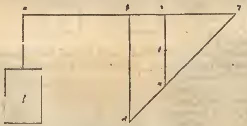
ε΄ Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ αβ΄γ. καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ α΄ παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ζ΄α, ἀπὸ δὲ τοῦ γ΄ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς

κατὰ

κατὰ τὸ γ, ἁ γ ζ. εἰ δή τις ἀχθείη ἐν τῷ ζ α γ τριγώνῳ παρὰ τὰν α ζ, τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ἀχθεῖσα τετμήσεται ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἁ α γ ὑπὸ τᾶς ἀχθείσας (ἀνάλογον) ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ τμᾶμα τᾶς α γ ποτὶ τὸ α, τῷ τμάματι τᾶς ἀχθείσας τῷ ποτὶ τᾷ α. ἄχθω γάρ τις ἁ δ ε παρὰ τὰν α ζ. καὶ τεμνέτω πρῶτον ἁ δ ε τὰν α γ δίχα. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β γ, καὶ ἄγμενα ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον. αἱ δὲ α δ, δ γ ἴσαι. ἐσσεῖται τᾷ α γ παράλληλος ἁ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. πάλιν ἐπεὶ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶν ἁ δ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἁ γ ε, ἄκτι ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἁ δὲ δ γ παράλληλος τᾷ κατὰ τὸ β ἐπιψαυούσα, ἴσα ἐστὶν ἁ ε β τᾷ β δ. ὥς τε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ α δ ποτὶ τὰν δ γ, ὃν ἁ δ β ποτὶ τὰν β ε. ἁ μὲν οὖν δίχα τέμνει ἁ ἀχθεῖσα τὰν α γ, δέδεικται. εἰ δὲ μή, ἄχθω τις ἄλλα ἁ κ λ παρὰ τὰν α ζ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ α κ ποτὶ τὰν κ γ, ὃν ἁ κ θ ποτὶ τὰν θ λ. ἐπεὶ γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ β ε τᾷ β δ, ἴσα ἐστὶ καὶ ἁ ι λ τᾷ κ ι, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ποτὶ τὰν κ ι, ὃν ἁ α γ ποτὶ τὰν δ α. ἔχει δὲ καὶ ἁ α ι ποτὶ τὰν θ κ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν α κ. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρότερον, ὡς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ κ θ ποτὶ τὰν θ λ, ὃν ἁ α κ ποτὶ τὰν κ γ. δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

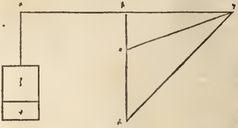


Νοείσθω δὲ τὸ, ὅτι δεῖ τὸ ἐν τῇ θεωρίᾳ προκείμενον ὁρώμενον εἶναι ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα καὶ τᾶς α β γραμμᾶς. ἔπειτα τὰ μὲν εἶναι τὰ αὐτὰ τῷ δ κάτω νοείσθω, τὰ δὲ εἶναι θάτερα ἄνω. τὸ δὲ β δ γ τρίγωνον ἔστω ὀρθογώνιον, ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τᾷ β γωνίαν, καὶ τὰν β γ πλευρὰν ἴσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ, δῆλον ὅτι ἴσας οὔσας τᾶς α β τᾷ β γ. κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν β γ σαμείων. κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ ζ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τὸ ζ χωρίον κατὰ τὸ α, κρεμάμενον τῷ β δ γ τριγώνῳ, οὕτως ἔοντι ὡς νῦν κεῖται. φαμὶ δὴ τὸ ζ χωρίον τοῦ β δ γ τριγώνου μέρος τρίτον εἶν. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορρόπων ὁ ζυγός ἐ κ, καὶ ἁ α ε γραμμὰ αὐτόν. ὁρίζονται δὲ ποτ᾽ ὀρθὰς ἀγόμεναι τᾷ α ε ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα, καθεῖσι ἴσσουσιν ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. τετμήσθω δὴ ἁ β γ γραμμὰ κατὰ τὸ ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν γ ε τᾶς ε β. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν δ β ἁ κ ε. καὶ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ θ. τοῦ δὴ β δ γ τριγώνου κέντρον βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς μηχανικοῖς. εἴκα οὖν τοῦ β δ γ τριγώνου, ὁ μὲν κατὰ τὰ β γ κρεμάσεις λυθέη, κατὰ δὲ τὸ ε κρεμασθῇ, μενεῖ τὸ τρίγωνον, ὡς νῦν ἔχει. ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων ἐξ οὗ σαμείου κατασταθῇ ἐν μένει, ὥς τε κατὰ κάθετον εἶμεν τό τε σαμεῖον τοῦ κρεμαστοῦ, καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ κρεμαμένου. δέδεικται οὖν καὶ τοῦτο. ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἕξει κατάστασιν τὸ β γ δ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ ζ χωρίον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπέοντι τὸ μὲν ζ κρεμάμενον κατὰ τὸ α, τὸ δὲ β δ γ κατὰ τὸ ε, δῆλον ὡς ἀντιπεπόνθει τοῖς μα-



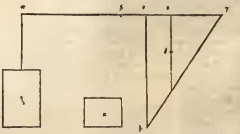
κεισι. καὶ ἐστιν ὡς ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, οὕτως τὸ β δ γ τρίγωνον ποτὶ τὸ ζ χωρίον. τριπλασία δέ ἐστιν ἁ α β τᾶς β ε. καὶ τὸ β δ γ ἄρα τρίγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ζ χωρίου. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ἀνὰ τριπλάσιον ἦ τὸ β δ γ τρίγωνον τοῦ ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

ζ Ἔστω πάλιν ζυγὸς ὁ α γ γραμμά, μέσον δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ β. καὶ κρεμάσθω ἀπὸ τοῦ β τὸ γ δ κ τρίγωνον. τὸ δὲ γ δ κ ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον, βάσιν ἔχον τὰν δ κ, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἐοῦσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ. καὶ κρεμάσθω τὸ δ γ κ τρίγωνον ἐκ τῶν β γ σαμείων, τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάμενον ἀπὸ τοῦ α ἰσορροπὲς ἔστω τῷ γ δ κ τριγώνῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὲ

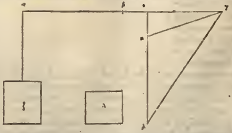


δειχθήσεται τὸ ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ γ δ κ τριγώνου. κρεμάσθω γάρ τι καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ α, τρίτον μέρος ἐὸν τοῦ β γ κ τριγώνου. ἰσορροπήσει δὲ τὸ β δ γ τρίγωνον τῷ ζ λ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν β γ κ τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ α, τὸ δὲ β γ δ τῷ ζ λ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ β γ δ τὸ ζ λ, φανερὸν ὅτι καὶ τὸ γ δ κ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ζ.

η Ἔστω ζυγὸς ὁ α β, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β, καὶ κρεμάσθω ἀπὸ τοῦ β τὸ γ δ ε τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ ε γωνίαν. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ ἀπὸ τῶν γ ε. τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω ἀπὸ τοῦ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ γ δ ε οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, τοῦτον ἐχέτω τὸ γ δ ε τρίγωνον ποτὶ τὸ κ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ ζ χωρίον τοῦ μὲν γ δ ε τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ κ μεῖζον. λελάφθω γὰρ τοῦ δ ε γ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος,



καὶ ἔστω τὸ θ. καὶ ἁ θ η ἄχθω παρὰ τὰν δ ε. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ γ δ ε τρίγωνον τῷ ζ χωρίῳ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ γ δ ε χωρίον ποτὶ τὸ ζ, ὃν ἁ α β ποτὶ τὰν β η. ὥστε ἔλασσον ἐστὶ τὸ ζ τοῦ γ δ ε. καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ ε τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ ζ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ β α ποτὶ τὰν β η. ποτὶ δὲ τὸ κ, ὃν ἁ β α ποτὶ τὰν β ε. δῆλον ὡς μείζονα λόγον ἔχει τὸ γ δ ε τρίγωνον ποτὶ τὸ κ, ἢ ποτὶ τὸ ζ. ὥστε μεῖζον ἐστὶ τὸ ζ τοῦ κ.

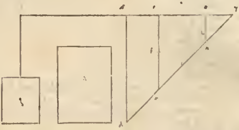


θ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α γ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ γ δ κ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν δ κ, ὕψος δὲ τὰν ε γ. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ ἀπὸ τῶν γ, ε, τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω

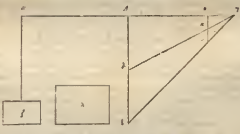
ἀπὸ

ἐπὶ τὸ α, ἃ ἰσορροπείτω τῷ δεκ τριγώνῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἐχέτω τὸ γδκ τρίγωνον ποτὶ τὸ λ. φαμὶ δὴ τὸ ζ τοῦ μὲν λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ γδκ ἔλασσον. δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αβγ ζύγιον, καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ βδηκ τραπέζιον, τὰς μὲν πο- ι
τὶ τοῖς β, η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον. τὰν δὲ κδ πλευρὰν, ἐπὶ τὸ γ νεύουσαν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ βα ποτὶ τὰν βη, τοῦτον ἐχέτω τὸ βδκη τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. κεκρεμάσθω δὲ τὸ βδηκ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ β, η σημεῖον. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ζ χωρίον κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ βδκη τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ τὸ ζ χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ λ. τετμάσθω γὰρ ἁ αγ κατὰ τὸ ε οὕτως, ὥστε μὲν ἔχειν λόγον ἁ διπλασία τᾶς δβ, καὶ ἁ κη ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς κη, καὶ τᾶς βδ, τοῦτον ἔχειν τὰν εη ποτὶ τὰν βε. καὶ διὰ τοῦ ε παρὰ τὰν βδ ἀχθεῖσα ἁ εν τετμάσθω δίχα ἐπὶ τὸ θ, τοῦ δὲ βδηκ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς μηχανικοῖς. εἰ οὖν τὸ βδηκ τραπέζιον ἐπὶ μὲν τὸ ε κρεμασθῇ, ἐκ δὲ τῶν β, η σημείων λυθείη, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν, διὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ ἰσορροπήσει τῷ ζ χωρίῳ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ βδηκ τραπέζιον κατὰ τὸ ε κρεμάμενον, τῷ ζ χωρίῳ ἐπὶ τὸ α κρεμαμένῳ, ἐστὶν ὡς ἁ βα ποτὶ τὰν βε, τὸ βδηκ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ χωρίον, μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ βδηκ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ, ἤπερ ποτὶ τὸ λ. ἐπεὶ καὶ ἁ αβ ποτὶ τὰν βε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ποτὶ τὰν βη. ὥστε ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ ζ τοῦ λ.

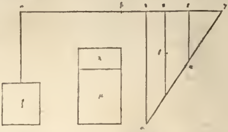


Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ κδτρ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ια
κδ, τρ πλευρὰς ἔχον ἐπὶ τὸ γ νευούσας. τὰς δὲ δρ, κτ καθέτους ἐπὶ τὰν βγ. καὶ ἁ δρ ἐπὶ τὸ β πιπτέτω. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βκ, τοῦτον ἐχέτω τὸ δκτρ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. τὸ δὲ δκτρ τραπέζιον κεκρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ β, κ, καὶ τὸ ζ κατὰ τὸ α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ ζ τῷ δκρτ τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ ζ χωρίον τοῦ λ.

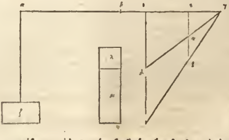


Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ δεκη τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν πο- ιβ
τὶ τοῖς ε, η σημείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ κδ, εη γραμμὰς ποτὶ τὸ γ νευούσας. καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βη, τοῦτον ἐχέτω τὸ δκεη τραπέζιον ποτὶ τὸ μ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ δκεη τραπέζιον, ποτὶ τὸ λ. κεκρεμάσθω δὲ τὸ δκεη τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ ε, η. τὸ δὲ ζ χωρίον ἐκκρεμάσθω κατὰ τὸ α, καὶ ἰσορροπείτω τῷ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ δὴ τὸ ζ τοῦ λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ μ ἔλασσον. ἐλάβομεν γὰρ τοῦ δκεη τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος. ἔστω δὲ τὸ θ. λαφθήσεται δὲ ὁμοί-

ὡς τῷ πρότερον. καὶ ἄγω τὰν θι παρὰ τὰν δε. αὖ οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθήσεται κατὰ τὸ ι, ἀπὸ δὲ τῶν ε, κ λυθῇ. μενεῖ τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν, καὶ ἰσορροπήσει τῷ ζ, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ ι, τῷ ζ κρεμαμένῳ κατὰ τὸ α, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ, ὃν ἁ αβ ποτὶ τὰν βι. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ δκει ποτὶ μὲν τὸ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ποτὶ τὸ ζ. ποτὶ δὲ τὸ μ ἐλάσσονα ἢ ποτὶ τὸ ζ. ὥστε τὸ ζ, τοῦ μὲν λ μεῖζον ἐστὶ, τοῦ δὲ μ ἔλασσον.

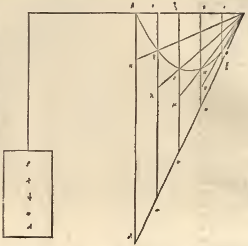


ιγ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ κδ, τρ τραπέζιον. ὥστε τὰς μὲν κδ, τρ πλευρὰς νευούσας ἀμὲν ἐπὶ τὸ γ. τὰς δὲ δτ, κρ καθέτους ἐπὶ τὰν βγ. κεκρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ ε, η. τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ δκτρ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ αβ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἐχέτω τὸ δκτρ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ χωρίον. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βη, τοῦτον ἐχέτω τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ μ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ ζ τοῦ μὲν λ μεῖζον, τοῦ δὲ μ ἔλασσον.



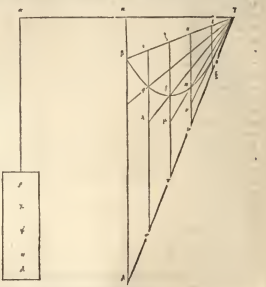
ιδ Ἔστω τμᾶμα τὸ βθγ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. ἔστω δὴ πρῶτον ἁ βγ ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ. καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ β σαμείου ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἐσσεῖται δὴ τὸ βγδ τρίγωνον ὀρθογώνιον. διῃρήσθω δὴ ἁ βγ εἰς τὰ τμάματα ὁποσαοῦν ἴσα τὰ βε, εζ, ζη, ηι, καὶ ἀπὸ τᾶν τομᾶν ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ εσ, ζτ, ηυ, ιξ. ἀπὸ δὲ τῶν σαμείων καθ' ἃ τέμνουσιν αὗται τὰν τοῦ κώνου τομὰν, ἐπεζεύχθωσαν κατὰ τὸ γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ τὸ τρίγωνον τὸ βδγ, τῶν μὲν τραπεζίων τῶν κε, λζ, μη, νι, καὶ τοῦ ξιγ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. τῶν δὲ τραπεζίων τῶν ζφ, ηθ, ιπ, καὶ τοῦ ιογ τριγώνου, μεῖζον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. διήχθω γὰρ εὐθεῖα, ἁ αβ. καὶ ἀπολελάφθω ἁ αβ ἴσα τᾷ βγ. καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ αγ. μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ β, καὶ κεκρεμάσθω ἐκ τοῦ β. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ βδγ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ βγ. ἐκ δὲ τοῦ θατέρου μέρους ζυγοῦ κεκρεμάσθω τὰ ρχψωδ χωρία κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τὸ μὲν ρ χωρίον τῷ δε τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι. τὸ δὲ χ τῷ ζσ τραπεζίῳ. τὸ δὲ ψ τῷ θπ. τὸ δὲ ω τῷ υι. τὸ δὲ δ τῷ ξιγ τριγώνῳ. ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ. ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ βδγ τρίγωνον τοῦ ρχψωδ χωρίου. καὶ ἐπεί ἐστι τμᾶμα τὸ βγθ, ὃ περιέχεται ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ β παρὰ τὰν διάμετρον ἦκται ἁ βδ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἦκται δέ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν διάμετρον ἁ σε. τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ βγ ποτὶ τὰν βε, ὃν ἁ σε ποτὶ τὰν εφ. ὥστε καὶ ἁ βα ποτὶ τὰν βε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ δε τραπέζιον ποτὶ τὸ κε. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἁ αβ ποτὶ τὰν βζ τὸν αὐτὸν ἔχειν

χων λόγον, ὅν τὸ σ ζ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ ζ. ποτὶ δὲ ταν β κ, ὅν τὸ τ κ ποτὶ τὸ μ κ. ποτὶ δὲ ταν β ι, ὅν τὸ υ ι ποτὶ τὸ ν ι. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τραπέζιον τὸ δ ε, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς β ε σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ γ νευούσας. ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ ρ, κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ α, οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὡς νῦν κεῖται. καί ἐστιν ὡς ἁ β α ποτὶ τὰν β ε, οὕτως τὸ δ ε τραπέζιον ποτὶ τὸ κ ε, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ κ ε χωρίον τοῦ ρ χωρίου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. πάλιν δὲ ἐπεὶ τὸ ζ σ τραπέζιον, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς ζ ε γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ σ τ νεύουσαν ἐπὶ τὸ γ. ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ χ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ τὸ α, οὕτως ἔχοντι τῷ τραπεζίῳ ὡς νῦν κεῖται. καί ἐστιν, ὡς μὲν ἁ β α ποτὶ ταν β ε, οὕτως τὸ ζ σ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ φ. ὡς δὲ ἁ α β ποτὶ τὰν β ζ, οὕτως τὸ ζ σ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ ζ. εἴη αὖ καὶ τὸ χ χωρίον τοῦ μὲν λ ζ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ζ φ μεῖζον. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ψ χωρίον τοῦ μὲν μ κ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ θ κ μεῖζον. καὶ τὸ ω χωρίον τοῦ μὲν ν ο ι κ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ π ι μεῖζον. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δ χωρίον τοῦ μὲν ξ ι γ τριγώνου ἔλασσον, τοῦ δὲ γ ι ο μεῖζον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν κ ε τραπέζιον μεῖζόν ἐστι τοῦ ρ χωρίου, τὸ δὲ λ ζ τοῦ χ, τὸ δὲ μ κ τοῦ ψ, τὸ δὲ ν ι τοῦ ω, τὸ δὲ ξ ι γ τρίγωνον τοῦ δ, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μείζονά ἐστι τοῦ ρ χ ψ ω δ χωρίου. ἔστι δὲ τὸ ρ χ ψ ω δ τρίτον μέρος τοῦ α γ δ τριγώνου. δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ β γ δ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν, ἢ τριπλάσιον τῶν κ ε, λ ζ, μ κ, ν ι τραπεζίων, καὶ τοῦ ξ ι γ τριγώνου. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ζ φ τραπέζιον ἔλασσόν ἐστι τοῦ χ χωρίου, τὸ δὲ θ κ τοῦ ψ, τὸ δὲ ι π τοῦ ω, τὸ δὲ ι ο γ τρίγωνον τοῦ δ, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ δ ω ψ χ χωρίου. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ β δ γ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν, ἢ τριπλάσιον τῶν φ ζ, θ κ, ι π τραπεζίων, καὶ τοῦ ι γ ο τριγώνου. ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.



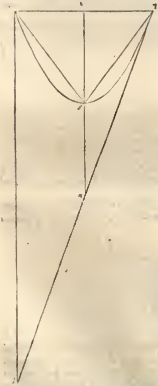
Ἔστω πάλιν τὸ β θ γ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἁ δὲ β γ ιϛ
μὴ ἔστω ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ, ἀναγκαῖον δὲ ἤτοι ταν ἀπὸ τοῦ β σαμείου παρὰ ταν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ τὸ τμάματι, ἢ ταν ἀπὸ τοῦ γ ἀμβλεῖαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ ταν β γ. ἔστω ἁ ταν ἀμβλεῖαν ποιοῦσα ἁ πὸς τῷ β, καὶ ἄχθω παρὰ ταν διάμετρον ἀπὸ τοῦ β ἁ β δ. καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἁ γ δ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. καὶ διῃρήσθω ἁ β γ εἰς τμήματα ἴσα ὁποσαοῦν τὰ β ε, ε ζ, ζ η, η ι, ι γ. ἀπὸ δὲ τῶν ε, ζ, η, ι παρὰ ταν διάμετρον ἄχθωσαν αἱ ε σ, ζ τ, η υ, ι ξ. καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων καθ᾽ ὃ τέμνοντι αὐτὰν ταν τοῦ κώνου τομὰν ἐπιζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ καὶ νῦν, τὸ β δ γ τρίγωνον, τῶν μὲν τραπεζίων τῶν β φ, λ ζ, θ η, π ι, καὶ τοῦ γ ι ξ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. τῶν δὲ ζ φ, η θ, ι π, καὶ τοῦ γ ο ι τριγώνου μεῖζον ἢ τριπλάσιον. ἐκβεβλήσθω ἁ δ β ἐπὶ θάτερα ἀγαγὼν καθετὸν τὰν γ κ, τᾷ γ κ ἴσαν ἀπέλαβον ταν α κ. νοείσθω δὲ πάλιν ζύγιον τὸ α γ. μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ κ. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ γ κ δ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ γ κ, ἔχον ὡς νῦν κεῖται, ἐκ τοῦ θατέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν

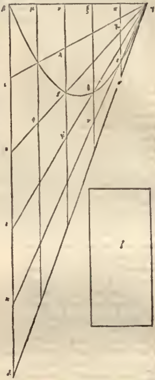
κατὰ τὸ α τὰ ρ χ ψ ω δ χωρία, καὶ τὸ μὲν ρ τῷ δε τραπεζίῳ ἰσοῤῥοπείτω, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. τὸ δὲ χ τῷ ζσ τραπεζίῳ. τὸ δὲ ψ τῷ τκ. τὸ δὲ ω τῷ υι. τὸ δὲ δ τῷ γιξ τριγώνῳ. ἰσοῤῥοπήσει δὲ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ, ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ δβγ τρίγωνον τριπλάσιον τῶν ρ χ ψ ω δ χωρίων. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ βφ τραπέζιον τοῦ ρ χωρίου μεῖζον, καὶ τὸ μ θε τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ χ χωρίου, τὸ δὲ ζφ ἔλασσον. καὶ τὸ μὲν μι τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ χωρίου. τὸ δὲ κθ ἔλασσον. καὶ ἔτι τὸ μὲν νι τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ ω χωρίου, τὸ δὲ πι ἔλασσον. καὶ τὸ μὲν ξιγ τρίγωνον μεῖζον τοῦ δ χωρίου. τὸ δὲ γιο ἔλασσον. δῆλον οὖν ἐστιν.



ιϛ Ἔστω πάλιν τμῆμα τὸ βθγ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ β ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἔστω δὲ τοῦ βδγ τριγώνου τρίτον μέρος τὸ ζ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ βθγ τμῆμα ἴσον εἶμεν τῷ ζ χωρίῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατὸν, μεῖζον. ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ βθγ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἑαυτᾷ ἐσσεῖται μεῖζον τοῦ βγδ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν τι χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ βδγ τριγώνου. ἔστω δὲ τὸ βγε τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς, καὶ μέρος τοῦ βδγ τριγώνου. ἐσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἁ βε μέρος τᾶς βδ. διῃρήσθω οὖν ἁ βδ εἰς τὰ μέρη. καὶ ἔστω τὰ τῶν διαιρέσιων σημεῖα τὰ η, ι, κ. καὶ ἀπὸ τῶν η, ι, κ σαμείων ἐπὶ τὰ γ, εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν. τέμνοντι δὴ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομὰν, ἐπεὶ ἁ γδ ἐπιψαύουσα ἐστὶ αὐτᾶς κατὰ τὸ γ. καὶ διὰ τῶν σαμείων τέμνοντι τὰν τομὰν, αἱ εὐθεῖαι ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον, αἱ μφ, νρ, ξθ. ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν βδ. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ βγε τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ βθγ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου, δῆλον ὡς τὰ συναμφότερα τό τε ζ χωρίον, καὶ τὸ βγε τρίγωνον, ἐλάσσονά ἐστι τοῦ τμήματος. καὶ τῷ βγε τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζια ἐστί. δι᾽ ὧν ἁ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ με, φλ, θρ, θο, καὶ τὸ γοσ τρίγωνον. τὸ μὲν γὰρ με τραπέζιον κοινὸν, τὸ δὲ μλ ἴσον τῷ φλ, καὶ τὸ λξ ἴσον τῷ θρ. καὶ τὸ χξ ἴσον τῷ οθ. καὶ τὸ γχπ τρίγωνον τῷ γοσ τριγώνῳ. τὸ δὴ ζ χωρίον ἔλασσον ἐστὶ τῶν τραπεζίων τῶν μλ, ξρ, πθ, καὶ τοῦ πογ τριγώνου. καὶ ἐστι τὸ βδγ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ζ χωρίου. τὸ δὴ βδγ ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν μλ, ρξ, θπ τραπεζίων, καὶ τοῦ πογ τριγώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἢ τριπλάσιον. οὐκ οὖν οὐ μεῖζόν ἐστι τὸ βθγ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἔστω γὰρ, εἰ δυνατὸν, ἔλασσον. πάλιν ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ ζ χωρίον τοῦ βθγ τμήματος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ βδγ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ βδγ τριγώνου.

γώνου. ἔστω οὖν τὸ β γ ε τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ β δ γ τριγώνου. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν δὴ τὸ β γ ε τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει τὸ ζ χωρίον τοῦ β θ γ τμήματος, τὸ β ε γ τρίγωνον, καὶ τὸ β θ γ τμῆμα ἀμφότερα ἐλάσσονά ἐντι τοῦ ζ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ζ χωρίον ἔλασσον τῶν παραπλεύρων τῶν ε μ, φ ν, ψ ξ, π τ, καὶ τοῦ γ π σ τριγώνου. ἔστι γὰρ τὸ β δ γ τοῦ μὲν ζ τριπλάσιον, τοῦ δὲ εἰρημένων χωρίων ἔλασσον ἢ τριπλάσιον, ὡς ἐν τοῖς πρὸ τούτου ἐδείχθη. ἔλασσον ἄρα τὸ β γ ε τρίγωνον, καὶ τὸ β θ γ τμῆμα τῶν παραπλεύρων τῶν ε μ, φ ν, ξ ψ, π τ, καὶ τοῦ γ π σ τριγώνου. ὥστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμήματος, ἔλασσον εἴη καὶ τὸ γ β ε τρίγωνον, τῶν περιλειπομένων χωρίων, ὅπερ δή ἐστιν ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὸν τὸ β ε γ τρίγωνον τοῖς τραπεζίοις τοῖς ε μ, φ λ, θ ρ, θ ο. καὶ τῷ γ ο σ τριγώνῳ, ἃ δή ἐστιν μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. οὐκ ἄρα ἔλασσον τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἴσον ἄρα τὸ τμῆμα τῷ ζ χωρίῳ.



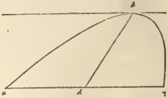


ιζ Τούτου δεδειγμένου φανερόν, ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. ἔστω γὰρ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ θ σαμεῖον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ β θ γ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ θ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος, ἁ ἀπὸ τοῦ θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν β γ. καὶ ἁ β γ δὴ παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ θ. ἄχθω δὲ ἁ ε θ παρὰ τὰν διάμετρον. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ β παρὰ τὰν διάμετρον ἁ β δ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γ δ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν κ θ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστίν, ἁ δὲ γ δ ἐπιψαύουσα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ γ· ἁ δὲ ε γ παράλληλος δὴ τᾷ ἐπιψαυούσᾳ τᾶς το-

μᾶς κατὰ τὸ θ. τὸ β δ γ τρίγωνον τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ β θ γ τριγώνου. ἐπεὶ δὲ τὸ β δ γ τρίγωνον, τοῦ μὲν β θ γ τμήματος τριπλάσιον, δῆλον ὡς ἐπίτριτόν ἐστι τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ β θ γ τριγώνου.

Τῶν τμαμάτων τῶν περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς, βάσιν μὲν καλῶ τὰν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς, ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμάματος. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ' οὗ ἁ μεγίστα κάθετος ἄγεται.

ιη Εἴκα ἐν τμάματι ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον, κορυφὰ ἐσσεῖται τοῦ τμάματος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἁ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ α β γ, περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μέσας τᾶς α γ ἄχθω ἁ δ β παρὰ τὰν διάμετρον. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου τομᾷ ἁ β δ ἆκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ α δ, δ γ, δῆλον ὡς παράλληλός ἐντι ἅ τε α γ, καὶ ἁ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. φανερὸν οὖν ὅτι ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ ἀγομενᾶν καθέτων μεγίστα ἐσσεῖται, ἁ ἀπὸ τοῦ β ἀγομένα. κορυφὰ οὖν ἐστι τοῦ τμάματος τὸ β σαμεῖον.

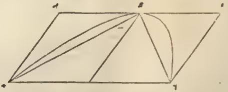


ιθ Εἴκα τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι παρὰ τὰν διάμετρον, ἁ μὲν ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως, ἁ δὲ ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισέας, ἁ ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως ἀχθεῖσα, τᾶς ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισέας ἀγομένας ἐπίτριτος ἐσσεῖται μάκει. ἔστω γὰρ τὸ α β γ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἁ μὲν β δ, ἀπὸ μέσας τᾶς α γ, ἁ δὲ ε ζ ἀπὸ μέσας τᾶς α δ. ἄχθω δὲ καὶ ἁ ζ θ παρὰ α γ. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον ἆκται. καὶ αἱ α δ, ζ θ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ἔσται μέν τοι δῆλον, ὡς τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ β δ ποτὶ τὰν β θ μάκει, ὃν ἁ α δ ποτὶ τὰν ζ θ δυνάμει. τετραπλασία ἄρα ἐστὶ καὶ ἁ β δ τᾶς β θ μάκει. φανερὸν οὖν ὅτι ἐπίτριτός ἐστιν ἁ β δ τᾶς ε ζ μάκει.



κ Εἴκα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μεῖζον ἔσται τὸ ἐγγραφὲν τρίγωνον, ἢ ἥμισυ τοῦ τμάματος.

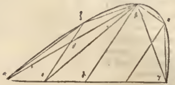
ἔστω γὰρ τὸ α β γ τμᾶμα, οἷον εἴρηται. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ α β γ, τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμάματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἀνάγκαιον τὸ β σαμεῖον κορυφὰν εἶμεν τοῦ τμάματος. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἁ α γ τᾷ κατὰ τὸ β ἐπιψαυούσᾳ τᾶς τομᾶς, ἄχθω ἁ δ ε διὰ τοῦ β παρὰ τὰν α γ. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ αἱ α δ, γ ε, παρὰ τὰν διάμετρον. πεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ οὖν ἥμισύ ἐστι τὸ α β γ τρίγωνον τοῦ α δ ε γ παραλληλογράμμου, φανερὸν ὅτι μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ τμάματος. δεδειγμένου, δῆλον ὅτι ὡς ἐς τὸ τμᾶμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράψαι, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα παντὸς ἐλάσσονα,



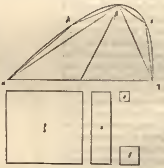
τοῦ

τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἀφαιρουμένου γὰρ ἀεὶ μείζονος ἢ ἡμίσεος, δῆλον φανερὸν ὅτι ἐλασσοῦντες ἀεὶ τὰ λειπόμενα τμήματα, ποιήσομεν ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Εἴκα εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα εἰς τὰ λειπόμενα τμήματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἑκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων, ὀκταπλάσιον ἐσσεῖται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμῆμα ἐγγραφέν. ἔστω τὸ α β γ τμῆμα, οἷον εἴρηται. καὶ τετμάσθω ἁ α γ δίχα τῷ δ. ἁ δὲ β δ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον, τὸ β ἄρα σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος. τὸ ἄρα α β γ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. πάλιν τετμάσθω δίχα ἁ α δ τῷ ε. κα ἄχθω ἁ ε ζ παρὰ τὰν διάμετρον. τετμάσθω δὲ ἁ α β κατὰ τὸ θ. τὸ ἄρα ζ σαμεῖον κορυφά ἐστι τμάματος τοῦ α ζ β. τρίγωνον ἄρα τὸ α ζ β τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ α ζ β τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. δεικτέον ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ α β γ τρίγωνον τοῦ α β ζ τριγώνου. ἐστὶν οὖν ἁ β δ τᾶς μὲν ε ζ ἐπίτριτος, τᾶς δὲ ε θ διπλασία. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ε θ τᾶς θ ζ. ὥστε καὶ τὸ α ε β τρίγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ζ β α. τὸ μὲν γὰρ α ε θ διπλάσιόν ἐστι τοῦ α θ ζ, τὸ δὲ θ β ε τοῦ ζ θ β. ὥστε τὸ α β γ τοῦ α ζ β ὀκταπλάσιον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ β η γ τμῆμα ἐγγραφέντος. κα



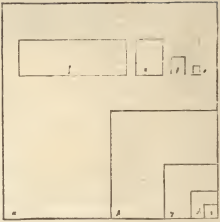
Εἴκα ᾖ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέωντι ἑξῆς ὁποσαοῦν ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, ᾖ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμάματος. ἔστω γὰρ τμῆμα τὸ α δ β ε γ, περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου τομᾶς. χωρία δὲ ἔστω ὁποσαοῦν ἑξῆς κείμενα τὰ ζ, η, θ, ι. τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ζ. καὶ ἔστω τὸ ζ ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. λέγω ὅτι τὸ τμῆμα τῶν ζ, η, θ, ι χωρίων μεῖζόν ἐστιν. ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κορυφὰ τὸ β. τῶν δὲ περιλειπομένων τμαμάτων τὰ δ, ε. ἐπεὶ οὖν τὸ α β γ τρίγωνον ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν α β δ, β ε γ τριγώνων, δῆλον ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστι τετραπλάσιον. καὶ ἐπεὶ τὸ α β γ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ζ χωρίῳ, κατὰ τὰ αὐτὰ ἦ καὶ τὰ α δ β, β ε γ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ η χωρίῳ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμάμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἴσων ὄντων τῷ θ. καὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ ι χωρίῳ, σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμῆμα. φανερὸν οὖν, ὅτι ἔλασσόν ἐστι τοῦ τμάματος. κβ



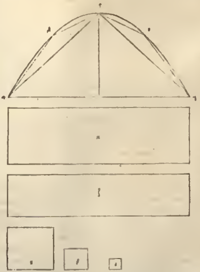
Εἴκα μεγέθεα συντεθέωντι ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ τὰ πάντα μεγέθεα, καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος εἰς τὸ αὐτὸ συντεθέντα, ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου. ἔστω οὖν ὁποσαοῦν μεγέθεα ἑξῆς κείμενα τὰ α, β, γ, δ, ε τετραπλάσιονα ἕκαστον τοῦ ἑπομένου. μέγιστον δὲ ἔστω τὸ α. ἔστω δὲ τὸ μὲν ζ τρίτον τοῦ β, τὸ δὲ η τοῦ γ, τὸ δὲ θ τοῦ δ, τὸ δὲ ι τοῦ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ζ τοῦ β τρίτον μέρος ἐστί, τὸ δὲ β τοῦ α τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφότερα τὰ β, ζ, μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ η, γ τοῦ β. καὶ τὰ θ, δ τοῦ γ. καὶ τὰ ι, ε τοῦ δ. κγ

δ, καὶ

δ. καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ β γ δ ε ζ η θ ι τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν α β γ δ ε. ἔστι δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ζ η θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν β γ δ. καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ β γ δ ε ι τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ α. δῆλον οὖν, ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ α β γ δ ε, καὶ τὸ ι, τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ ε, τοῦ α ἐστὶν ἐπίτριτα.



κδ Πᾶν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον. ἔστω γὰρ τὸ α δ β ε γ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. τὸ δὲ α β γ τρίγωνον ἔστω, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. τοῦ δὲ α β γ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ κ χωρίον. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ α δ β ε γ τμάματι.



εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ α δ ε β τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ἐνέγραψα δὴ τὰ α δ β, β ε γ τρίγωνα, ὡς εἴρηται. ἐνέγραψα δὲ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἄλλα τρίγωνα, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμάμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμάμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. ἐσσοῦνται δὴ τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ α δ ε β γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ κ, ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ ἐστὶν ἑξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ. πρῶτον μὲν τὸ α β γ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν α δ β, β ε γ τριγώνων. ἔπειτα δὲ, ταῦτα τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἑπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων. καὶ ἀεὶ οὕτω δῆλον, ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐστὶν, ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου. τὸ δὲ κ ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ α δ β ε γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ἔστω δὲ εἰ δυνατὸν, ἔλασσον. κείσθω δὴ τὸ μὲν α β γ τρίγωνον, ἴσον τῷ ζ. τοῦ δὲ ζ τέταρ-

τέταρτον τὸ κ̄. καὶ ὁμοίως τοῦ κ̄ τὸ θ̄. καὶ ἀεὶ ἑξῆς τιθέσθω. ὥς τι καταγγένηται τὸ ἔσχατον ἔλατ-
τον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ κ̄ χωρίον τοῦ τμήματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ ῑ. ἐστι δὲ τὰ ζ̄ η̄ θ̄ ι
χωρία, καὶ τὸ τρίτον τοῦ ῑ, ἐπίτριτα τοῦ ζ̄. ἐστι δὲ καὶ τὸ κ̄ τοῦ ζ̄ ἐπίτριτον. ἴσον ἄρα τὸ κ̄ τοῖς
ζ̄ η̄ θ̄ ι, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ῑ. ἐπεὶ οὖν τὸ κ̄ χωρίον τῶν μὲν ζ̄ η̄ θ̄ ι χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ
ῑ, τοῦ δὲ τμήματος μείζονι τοῦ ῑ, δῆλον ὡς μείζονα ἐντὶ τὰ ζ̄ η̄ θ̄ ι χωρία τοῦ τμήματος, ὅπερ ἀδύ-
νατον. ἐδείχθη γάρ, ὅτι ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν χωρία ἑξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον
ἴσον ᾖ τῷ εἰς τὸ τμῆμα ἐγγραφομένῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμή-
ματος. οὐκ ἄρα τὸ α̅ δ β ε̅ γ τμῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κ̄ χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἴσον
ἄρα ἐστὶν τῷ κ̄. τὸ δὲ κ̄ χωρίον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ α β̄ γ. καὶ τὸ α δ β̄ ε γ
τμῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ α β̄ γ τριγώνου.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ
παραβολῆς τέλος.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑ ΛΩΝΙΤΟΥ ΕΙΣ ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

καὶ κυλίνδρου, καὶ τὰ ἄλλα, ὑπομνήματα.

EVTOCII ASCALONITAE IN AR*CHIMEDIS LIBROS DE SPHAERA ET*

cylindro, atq; alios quoſdam, Commentaria, nunc primum & Græce & Latine in lucem edita.

Cum Cæſ. Maieſt. gratia & priuilegio, ad quinquennium.

BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit.
An. MDXLIIII.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA

MAGNIFICO DOMINO SEVERINO *BONERO A BALITZ, IN CAMIENETZ* AC OGRODZENETZ HAEREDI, CASTELLANO BYERENSI,

Burgrauio Zuppario, ac magno Procuratori Cracouienſi, &c. Domino & patrono ſuo obſeruandiſsimo, Thomas Venatorius ſeſe commendat.

OMnes, qui ad ſummos honeſtarum artium gradus uſq; aſcendere ſtudent, ordinis cum primis rationem ut habeant, contendunt: quòd nimirū contempta ordinis ratione, omnia paſsim confundi ſit neceſſe. Non minus autem in literarum ſtudijs, quàm in alijs rebus uniuerſis, ipſa parens rerum, ordinē eſſe uoluit, Natura. Vt enim à ſummo tecto domum ædificare qui cœperit, neglecta fundamenti ratione, fruſtra & oleum, quod autem, & operam inſumit: ſic qui ueræ philoſophiæ campos ſpacioſiſsimos ingreſſi, unius duntaxat agri floribus contenti, pedes ſiſtunt, nec ipſam ſegetem ac meſſem integrè legerint, aut ſaltem apis in morem deguſtauerint, doctos inter uerè quomodo recenſeri poſſint, non equidē uideo. Sed ad hæc gradatim, ſuſpenſiſq; interim pedibus concedendum eſſe, iampridem à maioribus noſtris accepimus. Neque temere ſibi quiſquam docendi prouinciā uſurpet hac in parte, quòd periculo non caret doctor. Non rarò enim arrogantia comitatur doctorem, ſæpe etiam ſui complacētia, Græcis φιλαυτία uocata. Quæ duo, maxime ubi doctoris animum occuparint, ipſum ſtatim non tam periculo uanæ gloriæ, quàm ludibrio uulgi exponere conſueuerunt. Diſcipulus etſi abiectus uideatur mundo, ipſum tamē quia humilitas animi commēdat Deo, ſecurè & extra periculum ambulat. Et quidem hæc omnia, ut ordinis decorum, ſiue ut Græci loquuntur, τὸ καλὸν καὶ τὸ πρέπον, à noſtris ſtudijs minime cupiam excludi, ſed potius conſtantiſsimè ſeruandam eſſe nobis moderationem illam in decoro ordinis, quæ & ipſa à Græcis ob id uocatur εὐταξία. Et recte profectò hæc ita eſſe à doctis cenſentur. In elementis enim, ubi ordinis ratio ſibi minus conſtare contigerit, ſequi uidemus in aëre fulmina, in terra commotiones, in mari inundationes: deniq; contempto ordine, experimur in urbibus & familijs ſeditiones, in corporibus ægritudines: & ut uno uerbo compræhendam multa, in animabus noſtris regnabunt peccata. Cum tanta ſit in rerum omnium natura, illa ordinis obſeruatio, in rectis ſtudijs abſoluendis cur ordinis ratio à nobis conturbaretur? Conturbaretur autē, ſi ſecus quàm à fundamentis ad ſumma contenderemus. Neq; enim ſacrum illum omniū diſciplinarum circulū abſoluerit unquā, qui minutas aliqui faſtidiēs, ſummas tantum aſſequi conatur artes. Ad ſumma cōtemplanda, niſi per

gradus quoſdam, non admittitur animus. Senſiſſe hoc idem Plato uidetur, cum ueſtibulo Scholæ ſuæ inſcriberet, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Qua utiq; ſentẽtia ſignificare uoluit, inutiles eſſe ad percipiendas liberales diſciplinas, qui nulla Muſices præſertim, & Geometriæ principia poſuiſſent. nempe quòd hæ diſciplinæ, imagines rerũ, quæ humanis ſaltem ſtudijs capi poſſunt, oculis mundi ſubijcere & poſſint & ualeant. Ipſa certè γεωμετρία mentem noſtram, ſuo ordine quàm longiſſimè tandem à rebus caducis abducit, ut iam non in terra infernè, ſed cœlo potius ſupernè, inhęrere cupiat, ac rebus ipſis delectari, quæ ut ſummè bona ſunt, ita nullam unquam permutationem admittũt. Quid quod magna pars Sacræ ſcripturæ obſcura nobis erit, niſi Geometrica proportione expendat ea pius lector. Templi Hieroſolymitani fabrica, nonne maxima cura & diligentia traditur? quæ omnia, niſi Geometrica proportione ſeruata, imparati & inculti uulgi cognitionem remorentur oportet. Præter alia, quanto ſtudio præcipit diuinus ſermo, de conſtruendis columnis? adeo ut omnia Geometrica ratione conſtarent, ſtylobaſtagmata, baſes quoq;, & ſpiræ: ſcapus deinde, ac plinthus ipſa qualis eſſe deberent, cum ipſis cymacijs, faſcijs, ſcotijs, ſtrijs, canaliculis, epiſtilijs, quæ omnia quàm longa & lata, quàm alta & profunda eſſent, per Geometricas rationes ſpiritus diuinus ſapientiſſimè commonſtrauit: quæ res animum hominis non tantum in admirationem, ſed etiam in cognitionem Opificis rerum, inducere equidem euidentiſſimè queant. Claruit in hiſce diſciplinis apud Syracuſas olim Archimedes, qui neſcias an doctior, an patriæ ſalutis fuerit amantior. Is quia ſcripſerat quædam, quæ acutiora cum eſſent, quàm ut rudes ſtatim capere poſſent, Eutocius Aſcalonita, homo ſua tempeſtate ut doctus, ita ingenio fœcũdus et fuit, & habitus eſt ab omnibus, ut iam nõ immerito de eo dixerit quidam: εὐτόκιος ὄντως ὄνομα αὐτοῦ. Verè enim eſt fœcũdus in omnibus illis explanãdis, in quibus obſcurior alioqui uideri poterat Archimedes. Eius ſcripta uiri, nunquam antehac in lucẽ edita, ſub tui nominis potiſſimũ tutela publicare placuit: cũ quòd dignus tu quidem es, cuius uirtuti hæc quoq; laus accedat, ut nominis tui fama, per ſe profectò clariſſima, acceſſione tanti ſcriptoris longè reddatur clarior: tũ quòd mei erga te, atq; adeò erga familiã tuã uniuerſam, ſynceri palàm argumẽtũ extaret amoris. Habes rationẽ huius facti mei. Soleo enim nõ infrequẽter admirari, in magnis rebus obeundis prudentiã tuam, in periculis propulſandis animi fortitudinẽ, fidem in promiſſis, induſtriã & ingenij acrimoniã in conſilijs, in conficiundis autẽ negocijs celeritatẽ. Quæ cum uerè excellẽtes ſint in uno homine, uirtutes, niſi à doctiſſimo quopiã, pro dignitate explicari nõ poſſunt: eas in præſentia attigiſſe ſaltẽ, mihi uiſum eſt ſatis. Itaque uiue diu fœlix, æuo ſuperante Sibyllas, anniſq; annoſum Neſtora uince. Vale. ex Norimberga, ad Calend. Ianuarij. Anno Salutis noſtræ MDXLIIII.

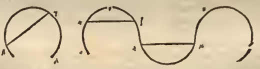
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ, ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Εἰς τὰ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀρχιμήδους οὐδένα τῶν πρὸ ἡμῶν ἀξίαν εὑρὼν σύνταξιν καταβεβλημένον. καὶ κατανοήσας μὴ δὲ διὰ δυσχέρειαν τῶν θεωρημάτων τοῦτο παρεωρᾶσθαι, ἐπιστάσεως γὰρ ἀκριβοῦς, ὡς ἴστε, καὶ εὐεπιβόλου δεῖται φαντασίας, ὠρέχθην κατ' ἐμὴν δύναμιν σαφῶς ἐκθέσθαι τὰ ἐν αὐτοῖς † θεωρήματα, προαχθεὶς μᾶλλον εἰς τοῦτο τῷ μηδένα πώποτε θεῖναι εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, ἢ διὰ τὴν δυσκολίαν ὀκνήσας, καὶ ἅμα τὸ σωκρατικὸν λογισάμενος, ὡς τοῦ θεοῦ συλλαμβάνοντος πάνυ εἰκὸς καὶ ἐπὶ τέλος ἡμᾶς τῆς σπουδῆς ἐλθεῖν. ἐκ τρίτου δὲ διανοηθείς, ὡς εἴ τι καὶ πταιόμενος διὰ νεότητα φθέγξομαι, τοῦτο ὑπό γε σοῦ περί τε τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας, καὶ διαφερόντως περὶ τὰ μαθήματα ἐπανορθώσεως τεύξεται, ἀνέθηκά σοι κράτιστε φιλοσόφων ἀμμώνιε. πρέπον δ' ἂν σοι τῇ ἐμῇ σπουδῇ συνάρασθαι. καὶ εἰ μὲν ἀντιμαῖον δόξει τὸ γράμμα, αὐτόθεν μὴ δὲ εἰς ἄλλον ἐλθεῖν συγχωρήσῃς. εἰ δὲ τοῦ σκοποῦ μὴ πάντη διαμαρτάνον, δῆλος ὢν ἔχει περὶ αὐτοῦ γνώμην, ὡς ἔγε τῇ ὑμετέρᾳ κρίσει βεβαιωθῇ, πειράσομαι καὶ ἄλλο τυχὸν τῶν ἀρχιμηδείων συνταγμάτων ἑρμηνεῦσαι.

† δυσθεώρητα

ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ.

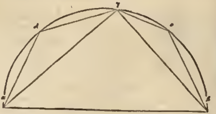
Προειπὼν τὰ μέλλοντα ἐκτίθεσθαι ὑπ' αὐτοῦ θεωρήματα, τοῦ συνήθους πᾶσι γεωμέτραις ἐν τῇ ἐκθέσει τηρῶν τάς τε ὀνομασίας αἷς αὐτὸς κατ' ἐξουσίαν ἐχρήσατο, καὶ τοὺς ὅρους τῶν ὑποθέσεων, καὶ αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συγγράμματος διασαφῆσαι βέλτιστον. καὶ φησὶ πρῶτον εἶναι τινὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς, αἳ τινὲς τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν εὐθειῶν ἢ πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. σαφὲς δὲ ἂν εἴη τὸ λεγόμενον, εἰ γνωσόμεθα τίνας καλεῖ τὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς. ἰστέον οὖν ὅτι καμπύλας γραμμὰς καλεῖ οὐχ ἁπλῶς τὰς κυκλικάς, ἢ κωνικάς, ἢ ἄκλαστον ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαν γραμμὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν, καμπύλην ὀνομάζει. μίαν δὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁποσοῦν συναπτομένην, ὥς τε κἂν ἐξ εὐθειῶν σύγκειται * τῇ α β γ δ. ἀλλ' ἐπειδὴ ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴρηται, καμπύλας γραμμὰς οὐ τὰς περιφερεῖς μόνον καλεῖ, ἀλλὰ καὶ τὰς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένας, ἐκ δὲ τούτων καὶ ἀνὰ λογὴν τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλων, γενόμενον αὐτὸν ἐκλαβεῖν ἐπὶ λοιπὸν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας γραμμὰς δύο τυχόντα σημεῖα, ὥστε



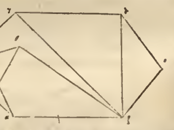
τὴν ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν, ἐπὶ μηδέτερα μὲν μέρη πίπτειν τῆς γραμμῆς, ἐπ' αὐτὴν ἐφαρμόζειν. διό φησιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην καλεῖν γραμμήν, ἐν ᾗ αἱ διὰ δύο ὁποιωνοῦν σημείων ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πίπτουσι τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς. ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μέρη οὐδὲ μία. τὰ δὲ αὐτὰ ἔξεστιν ἐπινοεῖν καὶ ἐπὶ ἐπιφανειῶν.

Εἶτα ἑξῆς ὀνομάζει τομέα στερεόν, καὶ ῥόμβον στερεόν, σαφῶς ἐμφανίζων τὴν ἔννοιαν τῶν ὀνομάτων. μετὰ δὲ ταῦτα αἰτήματα τινὰ λαμβάνειν ἀξιοῖ, χρησιμεύοντα αὐτῷ εἰς τὰς ἑξῆς ἀποδείξεις, καὶ ὄντα μὲν καθ' αὑτὰ τῇ αἰσθήσει ὡμολογημένα, οὐδὲν δὲ ἧττον δυνατὰ καὶ ἀποδειχθῆναι ἔκ τε τῶν κοινῶν ἐννοιῶν, καὶ ἐκ τῶν δεδειγμένων ἐν τοῖς στοιχείοις. ἔστι δὲ πρῶτον αἴτημα τὸ τοιόνδε, πασῶν τῶν ταὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. ἔστω γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ εὐθεῖα μὲν τις πεπερασμένη ἡ α β, ἑτέρα δέ τις γραμμὴ ἡ α γ β, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσα τὰ α, β. φησὶ δὴ δεδόσθαι αὐτῷ τὴν α β ἐλάττονα εἶναι τῆς α γ β. λέγω οὖν, ὅτι τοῦτο ἀληθὲς εὑρήσεται. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς α γ β, τυχὸν σημεῖον τὸ γ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, γ β. φανερὸν δή, ὅτι αἱ α γ, γ β τῆς α β μείζους εἰσί. πάλιν δὴ εἰλήφθωσαν ἐπὶ ταῖς α γ β γραμμαῖς ἄλλα τυ-

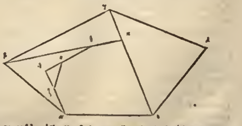
χόντα σημεῖα τὰ δ, ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ, γε, εβ. ὁμοίως δὴ καὶ ἐνταῦθα δῆλον, ὅτι δύο μὲν αἱ αδ, δγ τῆς αγ μείζους εἰσί. δύο δὲ αἱ γε, εβ τῆς γβ. ὥστε αἱ αδ, δγ, γε, εβ πολλῷ μείζους εἰσὶ τῆς αβ. ὁμοίως δὴ κἂν ἄλλα σημεῖα λαβόντες μεταξὺ τῶν εἰλημμένων ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὰ νῦν ληφθέντα, εὐθείας εὑρήσομεν αὐτὰς ἔτι μείζους τῆς αβ. καὶ τοῦτο συνεχῶς ποιοῦντες τὰς μᾶλλον συνεγγιζούσας τῇ αγβ γραμμῇ, εὐθείας ἔτι μείζους εὑρήσομεν. ὥστε ἐκ τούτου συμφανὲς εἶναι, αὐτὴν τὴν γραμμὴν μείζονα εἶναι τῆς αβ, δυνατοῦ ὄντος καὶ κατὰ πᾶν αὐτῆς σημεῖον ἐπιζεύξαντας εὐθείας λαβεῖν τὴν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένην τὴν εἰς αὐτὴν ἔσω γραμμήν, μείζονα δεικνυμένην διὰ τῶν αὐτῶν τῆς αβ. οὐ γὰρ ἄτοπον ἐν ταῖς τῶν ὁμολογουμένων ἀποδείξεσι καὶ τοιαύτας ἐννοίας προλαβεῖν.



Μετὰ δὴ τοῦτο φησίν, λαμβάνειν καὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐκείνας ἀνίσους εἶναι, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας οὔσας, κατὰ τὸν αὐτὸν τῷ εἰρημένῳ τρόπον. οὐ μόνον δὲ ἤρκεσεν εἰς τὸ ἀνίσους εἶναι τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν, ἢ ὅλην περιλαμβάνῃ, ἢ μέρος μὲν περιλαμβάνῃ, μέρος δὲ καὶ κοινὸν ἔχῃ, καὶ μείζονα εἶναι τὴν περιλαμβάνουσαν τῆς περιλαμβανομένης. νοείσθωσαν γὰρ πρὸς τὸ καὶ τοῦτο καταφανὲς γενέσθαι, ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμαὶ αἱ αβγδεζ, καὶ αηθζ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ α ζ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἔτι περιλαμβανομένη ὅλη ἡ αηθζ ὑπὸ τῆς αβγδεζ γραμμῆς, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐταῖς, τῆς αζ εὐθείας. φημὶ δὴ ὅτι καὶ ἄνισοι εἰσὶν αἱ προκείμεναι γραμμαί, καὶ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βθ, γζ, δζ. ἐπεὶ οὖν ἐὰν νοηθῇ ἐπιζευγνυμένη ἡ θα, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ αβθ, ἐντὸς συνεσταμέναι εἰσὶν αἱ αη, ηθ. καὶ ἐλάττους εἰσὶν αἱ αη, ηθ τῶν αβ, βθ. κοινὴ προσκείσθω ἡ θζ. αἱ ἄρα αη, ηθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν αβ, βθ, θζ. ἀλλ' αἱ βθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν βγ, γζ. ἐντὸς γὰρ πάλιν ἐπὶ μιᾶς τῆς βζ συνεστάμεναι εἰσί. πολλῷ ἄρα αἱ αβ, βγ, γζ τῶν αη, ηθ, θζ μείζους εἰσίν. ἀλλὰ τῆς γζ μείζονες αἱ γδ, δζ. τῆς δὲ δζ, αἱ δε, εζ. ἔτι πολλῷ ἄρα αἱ αβγδεζ μείζους εἰσὶ τῶν αηθζ.



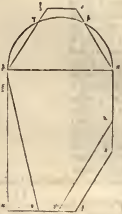
Σαφηνείας δὲ χάριν ὑποκείσθωσαν καὶ ἕτεραι γραμμαὶ ὁμοίως ταῖς προειρημέναις, ὡς αἱ αβγδε, αζηθκε. λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ περιλαμβάνουσα. νοείσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ αζ, ηθ, ἐπὶ τὸ λ. ἐπεὶ οὖν πάλιν δύο αἱ ζλ, λη μείζους εἰσὶ τῆς ζη, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αζ, ηθ. αἱ ἄρα αλ, λθ μείζους εἰσὶ τῶν αζ, ζη, ηθ. ἀλλ' αἱ αλ, λθ, ἐλάττους τῆς αβθ, πολλῷ ἄρα αἱ αβθ μείζους τῆς αζηθ.



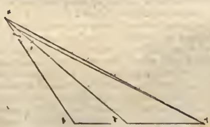
κοινὴ

κοινὴ προσκείσθω ἡ θκ. μείζους ἄρα αἱ αβ, βθκ τῶν αζ, ζθκ. ἀλλ' αἱ βθ, κε ἐλάττους τῶν βγ, κε. πολλῷ ἄρα μείζους αἱ αβ, γκ τῶν αξ, ξθκ. κοινὴ προσκείσθω ἡ κε. αἱ ἄρα αβ, γκε μείζους τῶν αζ, ζθκε. ἀλλ' αἱ γκε ἐλάττους τῶν γδ, δε, πολλῷ ἄρα αἱ αβ, γδ, δε μείζους εἰσὶ τῶν αζ, ζθκε.

Καὶ περιφέρειαι δὲ ὁμοίως, ἤτοι αἱ περιλαμβάνουσαι, ἢ αἱ περιλαμβανόμεναι, ἢ καὶ ἀμφότεραι, τὸ αὐτὸ χρὴ νοεῖν. συνεχῶν γὰρ σημείων ἐπ' αὐτῶν λαμβανομένων, καὶ ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν, ληφθήσονται γραμμαὶ ἐξ εὐθειῶν συγκείμεναι, ἐφ' ὧν ἁρμόσει ἡ προειρημένη ἀπόδειξις τῶν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένων, οἷον αὐτῶν γινομένων τῶν προτεθεισῶν, διὰ τὸ καὶ πᾶσαν γραμμὴν ἐκ συνεχῶν σημείων τὴν ὕπαρξιν ἔχουσαν † νοεῖσθαι. ὅτι δὲ ἀπό τους τὴν ἀνισότητα τῶν γραμμῶν οὐ μόνον τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι ἐχαρακτήριζεν, ἀλλὰ καὶ † ἔθηκε τὸ καὶ δεῖν περιλαμβάνεσθαι τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας, καὶ τὰς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσας εὐθείας. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδὲ τὸ ἀνίσους εἶναι τὰς γραμμάς, πάντη ἀληθὲς ὑπῆρχεν, ὡς ἔστι κατανοῆσαι ἐκ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἡ γὰρ αβγδ γραμμή, καὶ ἡ αεζδ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι εἰσί, καὶ ἄδηλον ὁποτέρα αὐτῶν μείζων ἐστί. δυνατὸν γὰρ καὶ ἴσας εἶναι. δυνατὸν δὲ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἑτέραν νοεῖν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσας ἀμφοτέρας, κατ' ἐναντίαν δὲ θέσιν ἀλλήλαις κειμένας, ὡς ὁποτέρα τῶν εἰρημένων τῇ αηθκδ. καὶ οὕτως γὰρ ἄδηλος, ἥτε ἰσότης καὶ ἀνισότης αὐτῶν. διὸ καλῶς πρόσκειται, τοῦτο δεῖν ἢ ὅλην τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας περιλαμβάνεσθαι, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνεσθαι, τινὰ δὲ καὶ κοινὰ ἔχειν, ὡς ἐπὶ τῶν αηθκδ, καὶ αλμνξδ. ἐπὶ γὰρ τούτων τινὰ μὲν περιλαμβάνεται, τινὰ δὲ κοινά ἐστι, ὡς τὰ αλ, μν.

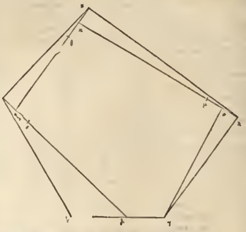


Δεόντως δὲ πάνυ κἀκεῖνο πρὸς κρίσιν τῆς ἀνισότητος παρελήφθη, τὸ δεῖν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τὰς γραμμάς. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδ' ἂν περιλαμβάνοιντο ὑπὸ ἀλλήλων, οὐδὲ οὕτως ἄνισοι εἰσί, ἀλλ' ἐνίοτε ἴσαι. ἢ καὶ ἡ περιλαμβανομένη μείζων. ὅπερ ἵνα σαφῶς γένηται, νενοήσθωσαν ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, ἀμβλεῖαν τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν περιέχουσαι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, αγ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ αδ τῆς αβ, κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε καὶ τετμήσθω ἡ αε δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ αζ, ζγ τῆς αγ μείζους εἰσί, ἴση δὲ ἡ αζ τῇ ζε. καὶ αἱ εζ, ζγ ἄρα τῆς αγ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αβ, δε. αἱ ἄρα δζγ τῶν βαγ μείζους εἰσίν. ὡς τε μιᾶς γραμμῆς νοουμένης τῆς βαγ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης. ἑτέρας δὲ τῆς δζγ περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας, μὴ ἐχούσης δὲ τὰ αὐτὰ πέρατα, οὐ μόνον ὅτι οὐ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων ἐδείχθη.



Καὶ ἐπὶ γραμμῶν δὲ ἐκ πλειόνων εὐθειῶν συγκειμένων τὸ αὐτὸ ἔστι θεωρῆσαι. νενοήσθωσαν γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζευγμένη ἡ αδ. πάλιν δὴ κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ ἡ εα δίχα τετμήσθω τῷ ζ. καὶ τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ αη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ κείσθω τῇ αη ἴση ἡ ζθ. καὶ πάλιν δίχα τετμήσθω ἡ θκ κατὰ τὸ

κ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ζκ ἤχθω ἡ κλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κλ. καὶ πάλιν τῇ κλ ἴση ἡ κμ. καὶ δίχα τετμήσθω ἡ μλ τῷ ν. καὶ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ κδ ἤχθω ἡ λε. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ νγ. φανερὸν οὖν διὰ τὰ προδεδειγμένα, ὅτι μείζων ἡ μὲν δζ τῶν αβ. ἡ δὲ ζκ τῆς αη, ἡ δὲ κν τῶν κλ. ἡ δὲ νγ τῶν λγ. ὥστε καὶ ὅλη ἡ γραμμὴ ἡ δζκνγ μείζων τῶν αβηλγ. καλῶς ἄρα προστέθειται τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τῶν ἀνίσων. τὰ αὐτὰ δὲ δυνατὸν ἐπινοοῦντα * ἀεὶ λαμβανόμεναι ἐπιφάνειαι τὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ.



ΕΙΣ ΤΟ Β ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ δὴ αγ ἑαυτῷ ἐπισυντεθειμένον ὑπερέξει τοῦ δ, δηλαδὴ ὡς τὸ αβ, ἤτοι ἐπιμορίῳ ἢ ἐπιμερεῖ, ἐπιμορίου ἢ ἐπιμερέους τυγχάνοντος τοῦ δ. εἰ δὲ εἴη τὸ αβ τοῦ δ, ἤτοι πολλαπλάσιον ἢ πολλαπλασιεπιμόριον, ἢ καὶ πολλαπλασιεπιμερὲς, ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ αβ, ἴσου τῷ δ τοῦ βγ, τὸ λοιπὸν τὸ γα ὑπερέξει τοῦ δ. ὥστε μηκέτι πολλαπλασιάζεσθαι αὐτὸ, ἀλλὰ αὐτόθεν δεῖν τῷ αγ ἴσον ἀποτίθεσθαι τὸ αθ, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν ἁρμόζειν. καὶ συνθέντι τὸ ζη πρὸς ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βγ. ὅτι γὰρ ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ συνθέντι ὁ αὐτὸς λόγος ἀκολουθεῖ. δειχθήσεται οὕτως. ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ αβ, βγ, δε, εζ. τὸ δὲ αβ πρὸς τὸ βγ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ. λέγω ὅτι καὶ συνθέντι τὸ αγ πρὸς τὸ γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ γβ πρὸς τὸ βα, οὕτως τὸ ζε πρὸς τὸ ζθ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, οὕτως τὸ θζ πρὸς τὸ ζε. μείζονα δὲ λόγον ἔχει τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. καὶ τὸ ζθ ἄρα πρὸς ζε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ζθ τοῦ εδ, καὶ ὅλον τὸ θε τοῦ δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θε πρὸς εζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. ἀλλ᾽ ὡς τὸ θε πρὸς εζ, τὸ αγ πρὸς γβ. διὰ τὸ συνθέντι, καὶ τὸ αγ ἄρα πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς εζ. ἀλλὰ δὴ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ζε, καὶ τὸ θε μεῖζον τοῦ δζ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ εζ, ἔσται μεῖζον τὸ θζ τοῦ δε. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θζ πρὸς ζε, τουτέστι τὸ αβ πρὸς βγ, διὰ τὸ διελόντι μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. φανερὸν δὲ διὰ τῶν ὁμοίων, ὅτι κἂν τὸ αβ πρὸς τὸ βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ, καὶ συνθέντι, καὶ πάλιν διελόντι ὁ αὐτὸς λόγος ἔσται. ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τοῦ ἀναστρέψαντος λόγος ἐμφανής ἐστιν. ἐχέτω γὰρ τὸ αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ ἀναστρέψαντι τὸ γα πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς δε. ἐπεὶ γὰρ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε, καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ,

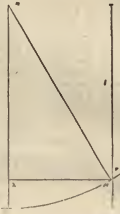


ἀνα-

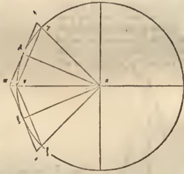
ἀνάπαλιν τὸ βγ πρὸς βα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζε πρὸς εδ, καὶ συνθέντι τὸ γα πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς δε.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Καὶ ἀπὸ τοῦ κ, τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κμ, δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἐκβληθείσης τῆς κλ ὡς ἐπὶ τὸ χ, καὶ τεθείσης τῆς θ ἴσης τῇ κχ, καὶ κέντρου τοῦ κ, διαστήματι δὲ τὸ κχ κύκλου γραφέντος ὡς τοῦ χμν. ἐστὶ γὰρ ἡ κμ ἴση τῇ κχ, τουτέστι τῇ θ.



Ἡ ἄρα νγ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. τῆς γὰρ μιᾶς ὀρθῆς οὔσης τεταρτημορίου βεβηκυίας, καὶ τῆς τομῆς κατὰ ἀρτίαν διαίρεσιν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γινομένης, δῆλον ὅτι καὶ ἡ τοῦ τεταρτημορίου περιφέρεια εἰς ἀρτιάκις ἀρτίους τὸν ἀριθμὸν ἴσας διαιρεθήσεται περιφερείας. ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα εὐθεῖα μίαν τῶν περιφερειῶν, πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. ὥστε καὶ ἡ οπ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου πλευρά. ἐὰν γὰρ τῇ ὑπὸ ξην γωνίᾳ ἴσην ποιήσαντες τὴν ὑπὸ πηδ, ἀπὸ τοῦ π ἐπὶ τὸ δ ἐπιζεύξωμεν καὶ προσεκβάλωμεν ἄχρι τῆς νθ ἴσην τῇ ὑπὸ πηδ, ἔσται ἴση ἡ πθ τῇ πο, ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ ἡ ξη ἴση ἐστὶ τῇ ηδ, κοινὴ δὲ ἡ ηπ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἄρα ἡ ξπ τῇ πδ ἴση ἐστί. καὶ ἡ ὑπὸ πξη ὀρθὴ οὖσα, τῇ ὑπὸ πδη. ὥστε ἐφάπτεται ἡ δπ. ἐπεὶ οὖν αἱ πρὸς τὸ δ ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ πηδ, δηθ ἴσαι, καὶ ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις κοινὴ ἡ δη, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ πδ τῇ θδ. ἀλλ' ἡ ξπ τῇ πδ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ θπ ἄρα τῇ πο ἐστὶν ἴση, καὶ πάσαις ταῖς ὁμοίως ἐφαπτομέναις, ὥστε ἡ θπ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρὰ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου. ὅτι δὲ καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγραφομένῳ αὐτόθεν δῆλον. ἴσης γὰρ οὔσης τῆς μὲν θη τῇ ηπ, τῆς δὲ γη τῇ ην, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ οπ τῇ γν, διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ πθ τῇ νκ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γνκ τῇ ὑπὸ οπθ ἴση ἐστί. καὶ διὰ τοῦτο ὅμοιόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.



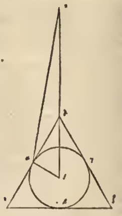
Ἡ ἄρα μκ πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γη πρὸς ητ. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς πρὸς τὸ κ γωνίας τῆς ὑπὸ γητ, ἐὰν τῇ ὑπὸ γητ ἴσην συστησώμεθα τὴν ὑπὸ λκρ τοῦ ρ μεταξὺ τῶν λμ νοουμένου, τὸ λκρ τρίγωνον τῷ γητ ὅμοιον ἐστίν, ὡς ἡ ρκ πρὸς κλ, οὕτως ἡ γη πρὸς ητ. ὥστε καὶ ἡ μκ πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γη πρὸς ητ.

ΕΙΣ ΤΟ Ϛ

Διὰ δὴ τοῦτο ἔλασσον ἐστὶ τὸ περιγραφόμενον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸ ἐγγραφόμενον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συναμφότερον πρὸς τὸν κύκλον, πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸν κύκλον. ὥστε τὸ περιγραφόμενον ἔλασσον ἐστὶ τοῦ συναμφοτέρου. καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ κύκλου, λοιπὰ τὰ περιλείμματα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ β χωρίου.

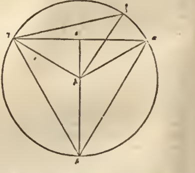
ΕΙΣ ΤΟ Η.

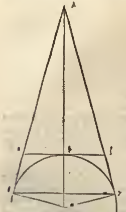
Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ α, β, γ ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι εἰσὶν ἐπ' αὐτάς. νοείσθω γὰρ χωρὶς ὁ κῶνος. καὶ ἔστω κορυφὴ μὲν αὐτοῦ τὸ η, κέντρον δὲ τῆς βάσεως αὐτοῦ τὸ θ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἡ θα. ἀπὸ δὲ τοῦ η, ἡ ηα. λέγω ὅτι ἡ ηα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν δε. ἐπεὶ γὰρ ἡ ηθ κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ διὰ αὐτῆς ἐπίπεδα, ὥστε καὶ τὸ ηθα τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ θα πρὸς ὀρθάς, ἦκται ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἡ δε. ἡ ἄρα δε τῷ ηθα ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ὥστε καὶ πρὸς τὴν ηα. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται καὶ ἐπὶ τὰς γ, β ἐπιζευγνύμεναι ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετοι οὖσαι ἐπὶ τὰς δζ, εζ. ἐπιστῆσαι δὲ χρή, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ πρὸ τούτου καλῶς προέκειτο, τὸ δεῖν πάντως τὴν ἐγγραφομένην πυραμίδα ἰσόπλευρον ἔχειν τὴν βάσιν. οὐ καλῶς γὰρ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰς τῆς βάσεως πλευρὰς ἴσαι ἐδύναντο εἶναι. ἐπὶ δὲ τοῦ προκειμένου οὐ προέθηκεν τὸ εἶναι ἰσόπλευρον τὴν βάσιν, διὰ τὸ δύνασθαι, κἂν ὁποιαοῦν ᾖ, τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖν.



ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ αβδ, βδγ τρίγωνα, τοῦ αδγ τριγώνου. ἐπεὶ γὰρ στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς τὸ δ, αἱ ὑπὸ αδβ, βδγ μείζους εἰσὶ τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἐπιζεύξωμεν, ὡς τὴν δε κάθετον γινομένην ἐπὶ τὴν αγ, ἔσται ἡ ὑπὸ αδβ μείζων τῆς ὑπὸ αδε. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ αδβ ἴση ἡ ὑπὸ αδζ. καὶ τεθείσης τῆς δζ ἴσης τῇ δγ, ἐπεζεύχθω ἡ αζ.





ἐπεὶ οὖν δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ γωνία γωνίᾳ, καὶ τὸ αβδ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αδζ τριγώνῳ, μείζονι ὄντι τοῦ αδε. καὶ τὸ αβδ ἄρα τρίγωνον τοῦ αδε μεῖζόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δβγ, τοῦ δεγ. δύο ἄρα τὰ αδβ, δβγ, τοῦ αδβ μείζονά ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΟ Ι.

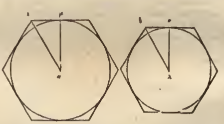
Ηχθω γὰρ ἡ ηζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ αγ, δίχα τμηθείσης τῆς αβγ περιφερείας κατὰ τὸ β. ὅτι γὰρ ἡ οὕτως ἀγομένη παράλληλός ἐστι τῇ αγ, δειχθήσεται ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ θ, ἐπιζευχθεισῶν τῶν θα, θδ, θγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ δγ, καὶ κοινὴ ἡ δθ, δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ αθ βάσει τῇ θγ, καὶ γωνία ἄρα γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ηβδ, βδζ γωνίαι ὀρθαί.

θαι. ἀπὸ γὰρ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπεζεύχθω ἡ θβ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δηβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ δζε ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἡ ηδ τῇ δζ ἴση ἐστίν. ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ ζη τῇ αγ.

Περιγραφομένων δὴ πολυγώνων περὶ τὸ τμῆμα, ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομεν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. ὅτι μὲν τῶν ἐγγραφομένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι τὰ ἐγγραφόμενα τρίγωνα εἰς τμήματα μείζονα ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ᾽ ἑαυτὰ τμημάτων. καὶ διὰ τοῦτο δυνατόν ἐστι, τέμνοντας τὰς περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντας εὐθείας, καταλείπειν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ δοθέντος χωρίου. ἐπὶ δὲ τῶν περιγραφῆς, οὐκέτι. τοῦτο δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ προκειμένῳ τοῦτο φασί, ὃ καὶ ἐστὶν αὐτὸ συλλογίσασθαι διὰ τοῦ ε θεωρήματος, δεικτέον ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἀφαιρεῖ τρίγωνον, μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ περιλείμματος, οἷον ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ὅτι τὸ κδζ τρίγωνον μεῖζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ περιλείμματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν αδ, δγ, καὶ τῆς αβγ περιφερείας. τῶν γὰρ αὐτῶν ἐπεζευγμένων, ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ δβζ, μείζων ἐστὶν ἡ δζ τῆς βζ. ἡ δὲ ζβ τῇ ζγ ἴση. ἐφάπτεται γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν. καὶ ἡ δζ ἐστὶ τῆς ζγ μείζων, ὥστε καὶ τὸ δβζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ βζγ τριγώνου. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. πολλῷ ἄρα τοῦ βζγ περιλείμματος μεῖζόν ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ, καὶ τὸ δβη τοῦ βηα μεῖζον. ὅλον ἄρα τὸ δηζ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αδγ περιλείμματος.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Νοείσθω δὴ εἰς τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. ὅπως μὲν οὖν ἐστιν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ ἐγγεγραμμένῳ, δῆλον. εἴρηται δὲ καὶ πάππῳ εἰς τὸ ὑπόμνημα τῶν στοιχείων, περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον περιγράψαι ὅμοιον τῷ περὶ ἕτερον κύκλον περιγεγραμμένῳ, οὐκ ἔτι ὁμοίως ἔχομεν εἰρημένον, ὅπερ νῦν λεκτέον. τῷ γὰρ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, ὅμοιον εἰς τὸν α ἐγγεγράφθω, καὶ περὶ αὐτὸν τὸν α ὅμοιον τῷ εἰς αὐτόν, ὡς ἐν τῷ γ θεωρήματι. καὶ ἔσται ὅμοιον καὶ τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ὃν περ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. τὸ τρίτον, ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγεγραμμένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ἐπὶ δὲ τῶν περιγεγραμμένων οὐκ ἔτι. δειχθήσεται δὲ οὕτως. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς τὰ περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εὐθύγραμμα. καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἐπεζευγμέναι αἱ κε, κμ, λθ, λν. φανερὸν δὴ ὅτι αἱ κε, λθ ἐκ τῶν κέντρων τῶν περὶ τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα κύκλων. καὶ πρὸς ἀλλήλας δυνάμει ὥστε τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ κεμ, λθν ἡμίσεαι τῶν ἐν τοῖς πολυγώνοις



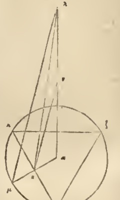
ὁμοίων ὄντων τῶν πολυγώνων, δῆλον ὅτι καὶ αὗται ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, ν ὀρθαί. ἰσογώνια ἄρα τὰ κεμ, λθν τρίγωνα. καὶ ἔσται ὡς ἡ κε πρὸς λθ, ἡ κμ πρὸς λν. ὥστε καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν, ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ κε πρὸς τὸ ἀπὸ θλ, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κμ πρὸς τὸ ἀπὸ λν, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα.

Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον, τὸ περὶ τὸν β κύκλον, ὅνπερ τὸ κτδ τρίγωνον. ἐπεὶ γὰρ τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους εὐθύγραμμα πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει, τουτέστιν ἡ τδ πρὸς ηρ δυνάμει, τουτέστιν ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει, τουτέστιν ὡς τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ζρλ, ἴσον δὲ τὸ κτδ τῷ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ κτδ πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, οὕτως τὸ αὐτὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ζρλ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ πρίσμα πρὸς τὸν κύλινδρον, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον πρὸς τὸν β κύκλον, ὅπερ ἄτοπον, ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, οὕτως τὸ ἐγγεγραμ-

μένον εἰς τὸν β κύκλον πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλασσον τοῦ β κύκλου, πρὸς ὃ μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ πρὸς τὸν κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸν κύκλον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΔ.

Ἡ δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἀγομένη ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. νοείσθω γὰρ χωρὶς ἡ ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφή, καὶ εἰς τὸν α κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον τὸ ζθκ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ α, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου τὴν θκ, κάθετος ἤχθω ἡ αη. φανερὸν δὴ ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς αη διπλάσιόν ἐστι τοῦ πολυγώνου. νοείσθω δὴ καὶ ἡ τοῦ κώνου κορυφὴ τὸ λ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὸ η ἐπιζευγνυμένη ἡ λη κάθετος γίνεται, ἐπὶ τὴν θκ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι τοῦ η θεωρήματος. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, ἔστι δὲ καὶ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, αἱ ἀπὸ τοῦ λ ἐφ᾽ ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀγόμεναι κάθετοι, ἴσαι εἰσὶ τῇ λη. ἑκάστη γὰρ αὐτῶν δύναται τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἴσης τῇ αη. διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς λη, διπλάσιόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. τὸ γὰρ ὑφ᾽ ἑκάστης πλευρᾶς, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς καθέτου ἐπ᾽ αὐτὴν ἀγομένης ἴσης τῇ λη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ καθ᾽ ἑαυτὴν τριγώνου. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ αη πρὸς ηλ, τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, κοινοῦ ὕψους τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου λαμβανομένου. ἀχθείσης δὴ τῆς ην παρὰ τὴν μλ, ἔσται ὡς ἡ αμ πρὸς μλ, ἡ αη πρὸς ην. ἡ δὲ αη πρὸς ην μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ηλ. μείζων γὰρ ἡ λη τῆς ην. καὶ ἡ αμ ἄρα πρὸς μλ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αη πρὸς ηλ, τουτέστιν ἤπερ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.



ΕΙΣ ΤΟ ΙϚ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αη, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς αδ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ, αη, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δζ τῇ αη. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ δζ τῇ αη, ἐστὶν ὡς ἡ βα πρὸς αη, ἡ βδ πρὸς δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν βα, δζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν βδ, αη. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βα, δζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδ, δζ. διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ β βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, αη ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ αδ, δζ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ δα, αη, ὅπερ δεῖ τὸ ὑπὸ βα, αη, ἴσον δεῖ τῷ ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ αδ, δζ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ αδ, αη.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΓ.

Τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. ὑπὸ τετράδος βούλεται μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου διὰ τὸ τοῦ κύκλου κινουμένου περὶ τὴν αγ διάμετρον, πάσας τὰς πλευρὰς κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν, χρησίμου ἐσομένου αὐτῷ ἐν τοῖς ἑξῆς τοῦ τοιούτου. μὴ γὰρ ὑπὸ τετράδος μετρουμένων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, κἂν ἀρτιόπλευρον ᾖ, οὐ πάσας δυνατὸν κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν, ὡς κατανοῆσαι γένεσιν ἐπὶ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν. δύο γὰρ τὰς ἀπεναντίον αὐτοῦ παραλλήλους πλευρὰς κατὰ κυλινδρικῆς φέρεσθαι ἐπιφανείας συμβαίνει, ὅπερ ὡς εἴρηται οὐ χρήσιμον αὐτῷ πρὸς τὰ ἑξῆς.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΘ.

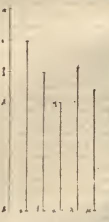
Ἡ δὲ κθ, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ αβγδ κύκλου. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ χ ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἐφάπτεται ἡ κξ τοῦ αβγδ κύκλου νοούμενον τὸ μ. ὁμοίως δὲ καὶ τὴν χκ, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ χκ τῇ χζ. εἰσὶ δὲ καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τὸ μ. ἴση γὰρ καὶ ἡ κμ τῇ μζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ζχ τῇ χθ ἴση. παράλληλος ἄρα ἡ χμ τῇ κθ. καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ὡς ἡ θζ πρὸς ζχ, οὕτως ἡ κθ πρὸς χμ. διπλῆ δὲ ἡ θζ τῆς χζ. διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κθ τῆς χμ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσης τοῦ αβγδ κύκλου.

ΕΙΣ ΤΟ Λ.

Ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ελ πρὸς ακ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ηλ, γκ, ὀρθῶν γωνιῶν τῶν πρὸς τοῖς κ, λ. καὶ παραλλήλου τῆς ακ τῇ λε. ἰσογώνιον γὰρ τὸ ηλε τρίγωνον, τῷ γκα τριγώνῳ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ ηλ πρὸς λε, οὕτως ἡ γκ πρὸς κα. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ηλ πρὸς λε, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ περιγεγραμμένον κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ γκ πρὸς κα, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας πρὸς τὴν τοῦ αβγδ κύκλου διάμετρον. ὡς ἄρα πᾶσαι, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ αὐτὸ κύκλου διάμετρον, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ αβγδ κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν, οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν. ἐπεὶ καὶ ὡς ἡ με πρὸς ελ, οὕτως ἡ μα πρὸς ακ. καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ελ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ακ, ἀλλ' ὡς πᾶσαι πρὸς τὴν πλευρὰν τὴν ελ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ελ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, τῆς ελ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὡς δὲ πᾶσαι πρὸς τὴν ακ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ακ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ακ. κοινοῦ ὕψους πάλιν λαμβανομένης τῆς ακ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ ακ. καὶ ὡς ἄρα αὐτὴ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὴν ελ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν πρὸς τὴν ακ. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὴν ἐκ κέντρου τοῦ ν, οὕτως ἡ ελ πρὸς ακ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ μ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν, ἡ ελ πρὸς ακ.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΒ.

Αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν κ τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. τὸ προκείμενον ἐστὶ, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ, ὅ ἐστιν τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν. ποιεῖται δὲ τοῦτο οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, γκ ἄνισοι. καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς αβ ἴσης τῇ γκ, τῆς βδ, ἡ λοιπὴ ἡ αδ τετμήσθω τριχῆ κατὰ τὰ ε, ζ. καὶ τῇ μὲν εβ ἴση κείσθω ἡ η, τῇ δὲ βζ ἴση ἡ θ. ἔσονται δὴ αἱ θ, ι, η ποιοῦσαι τὸ προκείμενον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ αβ πρὸς τὴν γκ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ αβ πρὸς τὴν η. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν η, οὕτως ἡ η πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ μέρει ἑαυτῆς ἡ αβ ὑπερέχει τῆς η, τούτῳ καὶ ἡ η ἑαυτῆς ὑπερέχει τῆς λ. τὸ δὲ αὐτὸ μέρος τῆς αβ μεῖζόν ἐστι τοῦ μέρους τῆς η. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ αβ τῆς η, ἤπερ ἡ η τῆς λ. τῷ δὲ αὐτῷ ὑπερέχει ἡ αβ τῆς η, καὶ ἡ η τῆς θ. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ η τῆς θ, ἤπερ ἡ η τῆς λ, ὥστε μείζων ἡ λ τῆς θ. ἐὰν δὴ πάλιν ποιήσωμεν ὡς τὴν η πρὸς τὴν λ, οὕτως τὴν λ πρὸς μ, πολλῷ μείζων ἔσται τῆς γκ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ αβ, η, λ, μ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἡ αβ πρὸς τὴν μ, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αβ πρὸς η. ὥστε ἡ αβ πρὸς τὴν γκ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν η.



ΕΙΣ ΤΟ ΛΕ.

Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ εθ, ἐστὶ τῶν εζ, γδ, κα δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ελ, κθ. ἐν γὰρ τῷ δευτέρῳ καὶ εἰκοστῷ θεωρήματι δέδεικται, ὅτι αἱ εζ, γδ, κα, πρὸς τὴν θκ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ λε πρὸς εθ. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τῷ δὲ ὑπὸ ελ, κθ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ θα. καὶ γὰρ τὸ ὑπὸ λθ, θκ, ἴσου ὄντος τῷ ἀπὸ θα. ὡς ἔστι δῆλον ἐπιζευγνυμένης τῆς αλ. καὶ διὰ τὸ ὅμοια γενόμενα τὸ θακ τρίγωνον τῷ θαλ. ἔστι γὰρ ὡς ἡ λθ πρὸς θα, ἡ αθ πρὸς θκ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΖ.

Ἕξει δὴ καὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ αβγ κύκλῳ. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ δ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ θ, ε, λ ἴσαι ἔσονται, διὰ τὸ καὶ τὰς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένας εὐθείας καθέτους εἶναι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. καὶ αὐτὰς δὲ τὰς ἐφαπτομένας δίχα τέμνεσθαι πρὸς τῇ ἁφῇ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ μζ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας φέρεται τῆς κολούρου ἐπιφανείας ἠθήσεται, ἡ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε ζμ, καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ζη καὶ τῆς μν. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ ὑπὸ τῆς μα γενομένης κολούρου κώνου ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς μα καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς αβ καὶ μν. καί ἐστιν ἡ μὲν ζμ μείζων τῆς μα, ἡ δὲ ζη τῆς αβ. μείζων ἄρα καὶ ἡ μέση τῆς μέσης, ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἡ ἄρα ὑπὸ ζμ, νη μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ μα, νβ ἐπιφανείας.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΗ.

Ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ ηζλ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς. ἀσαφέστερον δοκεῖ συνῆχθαι τὸ εἰρημένον. λέγοις δ' ἂν σαφῶς οὕτως. ἐπειδὴ ὁ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν δύναται τὸ ὑπὸ μθ, ζη, τὸ δὲ ὑπὸ μθ, ζη, μεῖζον τοῦ ὑπὸ γδ, δξ. ἡ μὲν γὰρ μθ ἴση δέδεικται τῇ γδ. ἡ δὲ ζη μείζων τῆς δξ. ὁ ν ἄρα κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ γδ, δξ. τὸ δὲ ὑπὸ γδ, δξ, ἴσον τῷ ἀπὸ δα. ὁ ἄρα ν κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου, μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δα.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΘ.

Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εκ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ πλευρᾶς. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ δλκ, παραλλήλου οὔσης τῆς εκ τῇ αλ, ἐστὶν ὡς ἡ εκ πρὸς αλ. ὡς δὲ ἡ εδ πρὸς δα, ἡ εζ πρὸς αγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς αλ, ἡ εζ πρὸς αγ. καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς εζ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς αγ. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας τῶν πολυγώνων δειχθήσεται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἡ εκ πρὸς αλ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς αλ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς πάσας τὰς ἐπιζευγνυούσας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εκ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς εκ καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς αλ καὶ πασῶν. τὰ γὰρ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τοῦ μὲν τῆς εκ πρὸς αλ λόγου διπλασίων ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς εκ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ. τῶν δὲ ἐπιζευγνυουσῶν τὰς τοῦ μείζονος, πρὸς τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς τοῦ ἐλάσσονος, διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ τῆς εκ, καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς αλ καὶ πασῶν. ὅμοια γὰρ καὶ ταῦτα, διὰ τὸ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχειν.

Καὶ ἔστιν ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὕτως ἡ αλ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν αλ κάθετον ἠγμένην. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζεύξωμεν εὐθεῖαν, ἔσται ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας τὰς εκ, αλ. καὶ ἔσται ὡς ἡ ελ πρὸς δα, τουτέστιν ἡ εκ πρὸς αλ, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν αλ κάθετον.

Ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ εκ πρὸς αλ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν.

ΕΙΣ ΤΟ Μ.

Ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ

ἐπιφανείᾳ

ἐπιφανεία τοῦ ἐγγεγραμμένου, οὕτως ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐκ τῶν κέντρων. καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἄρα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

ΕΙΣ ΤΟ ΜΒ.

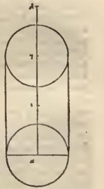
Τὸ ἄρα περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν β κῶνον. εἰ γὰρ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τὸν ὃν ἔχει ἡ β πρὸς ζ, ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα ἢ τριπλασίονα, τὸ ἄρα περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον ἄρα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον.

Εὐτοκίου ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

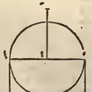
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ καὶ κυλίνδρου.

Σαφῶς ἡμῖν τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων γεγραμμένων, ἀκόλουθός καὶ ἡ περὶ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐν τοῖς δευτέροις θεωρήμασιν ἀπόδειξις. φησὶ δὲ πρῶτον ἐν τῷ α θεωρήματι. εἰλήφθω τῷ δοθέντι κῶνος, ἢ κυλίνδρῳ ἡμιόλιος κύλινδρος. τοῦτο δὲ διχῶς δυνατόν ἐστιν εἰπεῖν. ἤτοι τῆς βάσεως τῆς αὐτῆς σωζομένης ἐν ἀμφοτέροις, ἢ τοῦ ὕψους. καὶ ἵνα σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, νοείσθω κῶνος, ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ α κύκλος, ὕψος δὲ ἡ α γ. καὶ δέον ἔστω αὐτοῦ ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν. ὑποκείσθω δὲ πρότερον ὁ α γ κύλινδρος, καὶ προσεκβεβλήσθω τὸ α γ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, καὶ κείσθω τῆς α γ ἡμίσεια ἡ γ δ, ἡ ἄρα α δ ἡμιόλια ἐστὶ τῆς α γ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κύλινδρον, βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α δ εὐθεῖαν, ἡμιόλιος ἔσται τοῦ προτεθέντος τοῦ α γ. οἱ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. Εἰ δὲ κῶνος ἀπὸ α γ, τμηθείσης τῆς α γ δίχα ὡς κατὰ τὸ ε. ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α ε, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ α γ. ὁ γὰρ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α γ εὐθεῖαν, τοῦ μὲν α γ κώνου τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ α ε κυλίνδρου διπλάσιος. ὥστε δῆλον, ὅτι καὶ ὁ α ε κύλινδρος ἡμιόλιος ἐστὶ τοῦ α γ κώνου. οὕτως μὲν οὖν τῆς αὐτῆς βάσεως σωζομένης, ἔν τε τῷ προτεθέντι,

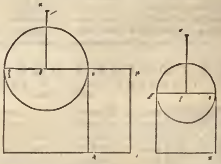


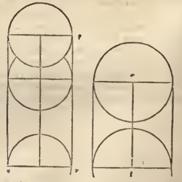




καὶ ἐν τῷ λαμβανομένῳ γενήσεται τὸ πρόβλημα. ἔστι δὲ καὶ τῆς βάσεως διαφόρου τυγχανούσης, τοῦ δὲ ἄξονος τοῦ αὐτοῦ μένοντος τὸ αὐτὸ ποιεῖν. ἔστω γὰρ πάλιν κῶνος ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ ζ η κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θ η εὐθεῖα. οὗ δέον ἔστω ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν, ὕψος ἔχοντα ἴσον τῇ θ η. ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ζ η διαμέτρου τοῦ κύκλου τετράγωνον τὸ ζ λ, καὶ προσεκβληθείσης τῆς ζ η, κείσθω αὐτῆς ἡμίσεια ἡ η μ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζ ν παραλλη

παραλληλόγραμμον. τὸ ἄρα ζν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ζλ, καὶ ἡ μζ τῆς ζκ. συνεστάτω δὴ τῷ ζν παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ξπ. καὶ περὶ διάμετρον μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλος περιγεγράφθω. ἔσται δὴ ὁ ξο ἡμιόλιος τοῦ ζκ. οἱ γὰρ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ κυλίνδρου οὗ βάσις μὲν ὁ ζκ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ. εἰ δὲ κῶνος εἴη, ὁμοίως τὰ αὐτὰ ποιήσαντες, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ζν παραλληλογράμμου ἴσον συστησάμενοι τετράγωνον, ὡς τὸ ξπ. καὶ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλον γράψαντες, νοήσομεν ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρον ὕψος ἔχοντα τὴν θκ. ἕξομεν αὐτὸν ἡμιόλιον τοῦ προτεθέντος κώνου. ἐπεὶ γὰρ τὸ ζν παραλληλόγραμμον τοῦ ξπ τετραγώνου τριπλάσιον, τοῦ δὲ ζλ ἡμιόλιον, τὸ ζλ τοῦ ξπ ἔσται διπλάσιον. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὁ κύκλος τοῦ κύκλου διπλάσιος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὴν ζκ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ περὶ τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ κώνου. ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἡμιόλιός ἐστι τοῦ προκειμένου κώνου. εἰ δέοι μήτε τὸν ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι, μήτε τὴν βάσιν, γενήσεται τὸ πρόβλημα πάλιν διχῶς. ἢ γὰρ τὴν βάσιν ἕξει ἴσην τῇ δοθείσῃ, ἢ τὸν ἄξονα ὁ πορίζομενος κύλινδρος. ἔστω γὰρ πρότερον ἡ βάσις δεδομένη, ὡς ὁ ξο κύκλος. καὶ δέον ἔστω κύλινδρον εὑρεῖν ἡμιόλιον τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἀπὸ βάσεως τῆς ξο. εἰλήφθω ὡς προείρηται τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος, βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ προτεθέντι ὁ φυ. καὶ γεγονέτω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ξο, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τυ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ φυ πρὸς τὴν ρσ. ἔσται ἄρα ὁ κύλινδρος ὁ ἀπὸ τῆς ξο βάσεως ὕψος ἔχων τὴν ρσ, ἴσος τῷ φυ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπίταγμα. εἰ δὲ μὴ ἡ βάσις ἡ διδομένη, ἀλλ' ὁ ἄξων τῷ αὐτῷ λόγῳ πορισθέντος τοῦ φυ, γενήσεται τὰ τῆς προτάσεως.





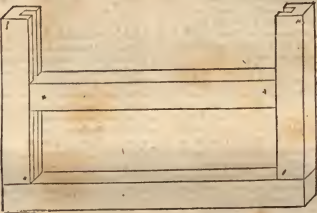
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Α.

Τούτου ληφθέντος, ἐπεὶ δι' ἀναλύσεως αὐτῷ προέβη τὰ τοῦ προβλήματος, λήξασης τῆς ἀναλύσεως εἰς τὸ δεῖν δύο δοθεισῶν δύο μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, φησὶν ἐν τῇ συνθέσει εὑρήσθωσαν. τὴν δὲ εὕρεσιν τούτων ἐπ' αὐτοῦ μὴ γεγραμμένην, οὐδὲ ὅλως εὑρίσκομεν. πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντετυχήκαμεν, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομέναις, ὧν τὴν Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου παρῃτησάμεθα γράφειν. ἐπειδή φησι μὲν ἐν προοιμίοις διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν ηὑρηκέναι. ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸς τὸ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ διῃρημένην ἀναλογίαν εὑρὼν, ὡς συνεχεῖ χρῆται, ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι. τί λέγω περὶ Εὐδόξου,

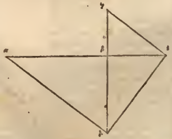
λέξιν, ἀλλὰ περὶ τὴν κατὰ μετρίους περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων. ἵνα δὲ ἡ τῶν εἰς ἡμᾶς ἐληλυθότων ἀνδρῶν γνῶσις ἐμφανὴς γένηται, ὁ ἑκάστου εὑρίσεως τρόπος καὶ ἐνταῦθα γραφήσεται.

ΩΣ ΠΛΑΤΩΝ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β̄ γ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ δ, ε, καὶ κατεσκευάσθω ὀρθὴ γωνία ἡ ὑπὸ ζ η θ. καὶ ἐν ἑνὶ σκέλει τῷ ζ̄ η. κινείσθω κανὼν ὁ κ λ ἐν σωλῆνί τινι ὄντι ἐν τῷ ζ̄ η, οὕτως ὥστε παράλληλον αὐτὸν διαμένειν τῷ η θ. ἔσται δὲ τοῦτο, ἐὰν καὶ ἕτερον κανόνιον νοηθῇ συμφυὲς τῷ θ̄ η, παράλληλον δὲ τῷ ζ̄ η, ὡς τὸ θ̄ μ. σωληνισθεισῶν γὰρ τῶν ἄνωθεν ἐπιφανειῶν τῶν ζ̄ η, θ̄ μ σωλῆσι πελεκινοειδέσι, καὶ τύλων συμφυῶν γενομένων τῷ κ λ, εἰς τοὺς εἰρημένους σωλῆνας, ἔσται ἡ κίνησις τοῦ κ λ παράλληλος ἀεὶ τῷ η θ. τούτων οὖν κατεσκευασμένων, κείσθω τὸ ἓν σκέλος τῆς γωνίας



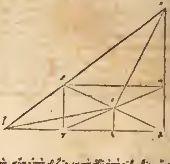
τυχὸν τὸ η θ, ψαῦον τοῦ γ̄, καὶ μεταφερέσθω ἥ τε γωνία καὶ ὁ κ λ κανὼν ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν τὸ μὲν η σημεῖον ἐπὶ τῆς β̄ δ εὐθείας ᾖ, τοῦ θ η σκέλους ψαύοντος τοῦ γ̄. ὁ δὲ κ λ κανὼν κατὰ μὲν τὸ κ ψαύῃ τῆς β̄ ε εὐθείας, κατὰ δὲ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ α. ὥστε εἶναι ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν θέσιν ἔχουσαν, ὡς τὴν ὑπὸ γ δ̄ ε. τὸν δὲ κ λ κανόνα θέσιν ἔχειν, οἵαν ἔχει ἡ ε α. τούτων γὰρ γενομένων ἔσται τὸ προκείμενον. ὀρθῶν γὰρ οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς δ, ε̄, ἔστιν ὡς ἡ γ̄ β πρὸς β̄ δ, ἡ δ̄ β πρὸς β̄ ε, καὶ ἡ ε̄ β πρὸς β̄ α.



ΩΣ ΗΡΩΝ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ, καὶ ἐν τοῖς βελοποιικοῖς.

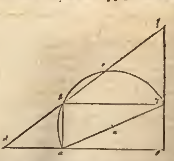
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α̅ β, β̄ γ. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. κείσθωσαν ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β̄, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ β δ παραλ-

λληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ. φανερὸν δή, ὅτι ἴσαι εἰσὶ καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὁ γὰρ περὶ μίαν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν περάτων τῆς ἑτέρας, διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ δγ, δα ἐπὶ τὰ ζ, η, καὶ νοείσθω κανόνιον ὡς τὸ ζβη, κινούμενον περί τινα τύλον, μένοντα πρὸς τῷ β. καὶ κινείσθω ἕως ἀποτέμνει ἴσας τὰς ἀπὸ τοῦ ε, τουτέστι τὰς εη, εζ. καὶ νοείσθω ἀποτεμόν, καὶ θέσιν ἔχον τὴν ζβη, ἴσων ὡς εἴρηται γινομένων τῶν εη, εζ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν γδ κάθετος ἡ εθ, δίχα δὴ τέμνει δῆλον ὅτι τὴν γδ. ἐπεὶ οὖν δίχα τέμνεται ἡ γδ κατὰ τὸ θ, καὶ πρόσκειται ἡ γζ, τὸ ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γθ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ θζ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εθ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τῶν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ζθ, θε. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ γε. τοῖς δὲ ἀπὸ ζθ, θε ἴσον τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον τῷ ἀπὸ εζ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ δηα μετὰ τοῦ ἀπὸ αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εη. καί ἐστιν ἴση ἡ μὲν αε τῇ εγ, ἡ δὲ ηε τῇ εζ. καὶ τὸ ὑπὸ δζγ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δηα. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. ἔστιν ἄρα ὡς ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ αη πρὸς γζ. ἀλλ' ὡς ἡ ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ ζγ πρὸς γβ, καὶ ἡ βα πρὸς αη. τριγώνου γὰρ τοῦ ζδη παρὰ μίαν μὲν τὴν δη, ἦκται ἡ γβ. παρὰ δὲ τὴν δζ ἡ αβ. ὡς ἄρα ἡ βα πρὸς αη, οὕτως ἡ αη πρὸς γζ, καὶ ἡ γζ πρὸς γβ. τῶν ἄρα αβ, βγ, μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αη, γζ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΦΙΛΩΝ Ο ΒΥΖΑΝΤΙΟΣ.

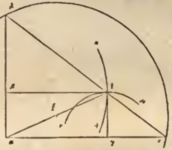
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, κείσθωσαν, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς αγ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ αβεγ. καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν, τῇ μὲν βα, ἡ αδ. τῇ δὲ βγ ἡ γζ. καὶ παρακείσθω κανὼν κινούμενος πρὸς τῷ β, τέμνων τὰς αδ, γζ. καὶ κεκινήσθω περὶ τὸ β, ἄχρις οὗ ἡ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ δ ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ ζ, τουτέστι τῇ μεταξὺ τῆς τε περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς γζ. νενοήσθω οὖν ἔχον τὸ κανόνιον θέσιν, οἵαν ἔχει ἡ δβεζ, ἴσης οὔσης ὡς εἴρηται τῆς δβ τῇ εζ. λέγω ὅτι αἱ αδ, γζ μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν αβ, βγ. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ δα, ζγ, καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ θ. φανερὸν δὴ ὅτι παραλλήλων οὐσῶν τῶν βα, ζθ, ἡ πρὸς τῷ θ γωνία ὀρθή ἐστι. καὶ ὁ αεγ κύκλος ἀναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ τῇ εζ, καὶ τὸ ὑπὸ εδβ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βζε. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ εδβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θδα. ἑκάτερον γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ δ. τὸ δὲ ὑπὸ βζε ἴσον τῷ ὑπὸ θζγ. ἑκάτερον γὰρ ὁμοίως ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ ζ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ θδα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζγ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς θζ, οὕτως ἡ γζ πρὸς δα. ἀλλ' ὡς ἡ θδ πρὸς θζ, οὕτως ἥ τε βγ πρὸς γζ, καὶ ἡ δα πρὸς αβ. τριγώνου γὰρ τοῦ δθζ, παρὰ μὲν τὴν δθ, ἦκται ἡ βγ, παρὰ δὲ τὴν θζ ἡ βα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς ζγ, ἡ γζ πρὸς δα, ἡ δα πρὸς αβ, ὅπερ προέκειτο δεῖξαι.



Ἰστέον δὲ, ὅτι ἡ τοιαύτη κατασκευὴ σχεδὸν ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Ἥρωνος κατασκευῆς, καὶ αἱ προσεκβαλλόμεναι πλευραὶ αἱ β α, θ γ. καὶ ὁ περὶ τὸ β κινούμενος κανών. ταύτῃ δὲ μόνον διαφέρει, ὅτι ἐκεῖ μὲν μέχρι τοσούτου ἐκινοῦμεν περὶ τὸ β τὸν κανόνα, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς α γ, τουτέστι τοῦ κ ἴσαι ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀποτέμνονται πρὸς ταῖς θ δ, β ζ προσπιπτούσαις, ὡς αἱ κ δ, κ ζ, ἐνταῦθα δὲ ἄχρις ἂν ἡ δ β ἴση γένηται τῇ ε ζ. ἐφ᾽ ἑκατέρας δὲ κατασκευῆς τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ. τὸ δὲ νῦν εἰρημένον πρὸς χρῆσιν εὐθετώτερον. τὰς γὰρ δ β, ε ζ ἴσας τηρεῖν ἐνδέχεται διηρημένου τοῦ δ ζ κανόνος εἰς ἴσα καὶ συνεχῆ. πολὺ γὰρ δυσκολώτερον τοῦ καρκίνου διαπειράζειν τὰς ἀπὸ τοῦ κ ἴσας πρὸς τὰ δ, ζ.

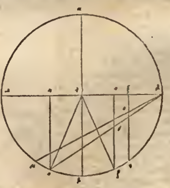
ΩΣ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν αἱ α β γ, ὀρθὴν περιέχουσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ α γ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ κ θ λ. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ α β κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ μ θ ν. καὶ τεμνέτω τὴν κ θ λ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ α, θ β, θ γ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ α γ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θ α. τετμήσθω δίχα ἡ θ α τῷ ξ, καὶ κέντρῳ τῷ ξ γεγράφθω κύκλος τέμνων τὰς α β, α γ ἐκβληθείσας κατὰ τὰ δ, ε. ὥστε μέντοι τὰ δ, ε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τῷ θ, ὅπερ ἂν γένοιτο κανονίου κινουμένου περὶ τὸ θ, τέμνοντος τὰς α δ, α ε. καὶ παραγομένου ἐπὶ τοσοῦτον ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὰ δ, ε ἴσαι γένωνται. τούτου γὰρ γενομένου ἔσται τὸ ζητούμενον. ἡ γὰρ αὐτὴ κατασκευή ἐστι τῇ τε ὑπὸ Ἥρωνος καὶ Φίλωνος γεγραμμένῃ. καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει.



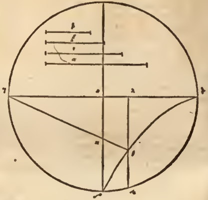
ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

Ἐν κύκλῳ ἤχθωσαν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς αἱ α β, γ δ, καὶ δύο περιφέρειαι ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ β αἱ ε β, β ζ. καὶ διὰ τοῦ ζ παράλληλος τῇ α β, ἤχθω ἡ ζ η. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δ ε. λέγω ὅτι τῶν γ η, η θ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ζ η, η δ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ ε τῇ α β παράλληλος ἡ ε κ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ε κ τῇ ζ η, ἡ δὲ κ γ τῇ η δ. ἔσται γὰρ τοῦτο δῆλον ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὰ ε, ζ ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ὑπὸ γ λ ε, ζ λ δ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς κ, η. καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν διὰ τὴν λ ε τῇ λ ζ ἴσην εἶναι, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ γ κ τῇ η δ, ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δ κ πρὸς κ ε, ἡ δ η πρὸς η θ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ δ κ πρὸς κ ε, ἡ ε κ πρὸς κ γ. μέση γὰρ ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ε κ τῶν δ κ, κ γ. ὡς ἄρα ἡ δ κ πρὸς κ ε, καὶ ἡ ε κ πρὸς κ γ, οὕτως ἡ δ η πρὸς η θ. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ μὲν δ κ τῇ γ η, ἡ δὲ κ ε τῇ ζ η. ἡ δὲ κ γ τῇ η δ. ὡς ἄρα ἡ γ η πρὸς η ζ, ἡ ζ η πρὸς η δ, καὶ ἡ δ η πρὸς η θ. ἐὰν δὲ παρ᾽ ἑκάτερα τοῦ β ληφθῶσι περιφέρειαι ἴσαι μ β, β ν. καὶ διὰ μὲν τοῦ ν παράλληλος ἀχθῇ τῇ α β ἡ ν ξ. ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ δ μ. ἔσονται πάλιν τῶν γ ξ, ξ ο μέσαι ἀνάλογον αἱ ν ξ, ξ δ. πλειόνων οὖν οὕτως καὶ συνεχῶν παραλλήλων ἐκβληθεισῶν μετα-



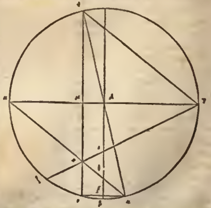
ξὺ τῶν β, δ. καὶ ταῖς ἐκλαμβανομέναις ὑπ' αὐτῶν περιφερείαις πρὸς τῷ β, ἴσων πλευρῶν ἐκ τοῦ β ὡς ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐπὶ τὰ τεταγμένα σημεῖα ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν ἐκ τοῦ δ, ὡς τῶν ὁμοίως ταῖς δε, δμ, τμηθήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μεταξὺ τῶν β, δ κατά τινα σημεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὰ ο, θ. ἐφ' ἃ κανόνος παραθέσει ἐπιζεύξαντες εὐθείας, ἕξομεν καταγεγραμμένην ἐν τῷ κύκλῳ τινὰ γραμμήν. ἐφ' ἧς ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ λβ, καὶ ἡ ἀχθεῖσα, καὶ ἡ ἐκλαμβανομένη ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ δ, μέσαι ἀνάλογον ἔσονται τῆς ἐκλαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ γ σημείῳ, καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ γραμμῇ σημείου ἐπὶ τὴν γδ διάμετρον.

Τούτων προκατασκευασμένων, ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ α, β. καὶ ἔστω κύκλος ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γδ, εζ. καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμή, ὡς προείρηται, ἡ δθζ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, ἡ γη πρὸς ηκ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γκ, καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ τῇ εζ παράλληλος ἤχθω ἡ λμ. διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν γλ, λθ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μλ, λδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ γλ πρὸς λθ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηκ. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηκ, οὕτως ἡ α πρὸς τὴν β. ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς γλ, λμ, λδ, λθ παρεμβάλλωμεν μέσας τῶν α, β ὡς τὰς ν, ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν α, β μέσαι ἀνάλογον αἱ ν, ξ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΠΑΠΠΟΣ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ.

Προέθετο μὲν ὁ Πάππος κύβον εὑρεῖν πρὸς τὸν δοθέντα κύβον, λόγον ἔχοντα δοθέντα. καὶ ὡς πρὸς τὴν τοιαύτην πρότασιν καὶ τὰ ἐκ τῆς ἀποδείξεως αὐτῷ προέχεται. δῆλον δὲ ὅτι τούτου εὑρισκομένου, καὶ τὸ προκείμενον εὑρίσκεται. δύο γὰρ δοθεισῶν εὐθειῶν, ἐὰν ὀφειλουσῶν μέσων εὑρεθῆναι, ἡ δευτέρα εὑρεθῇ, καὶ ἡ τρίτη αὐτόθεν δοθήσεται. γεγράφθω γάρ, ὡς φησὶν αὐτὸς κατὰ λέξιν, ἡμικύκλιον τὸ αβγ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δβ, καὶ κινείσθω κανόνιον περὶ τὸ α σημεῖον. ὥστε τὸ μὲν ἓν πέρας αὐτοῦ προκεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ α σημεῖον. τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινείσθω μεταξὺ τῶν β, γ. τούτων δὲ κατεσκευασμένων ἐπετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν, λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους τὸν ἐπιταχθέντα, καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς βδ πρὸς

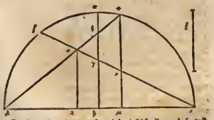


δε

δε. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. παραγέσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν β, γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ζε, εβ εὐθειῶν, ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς βε εὐθείας, καὶ τῆς βκγ περιφερείας. τοῦτο γὰρ πειράζοντες, καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον, ῥᾳδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δὴ καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν ακ, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς κθ, θκ. λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον, λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστι τὸν τῆς βδ πρὸς δε. νενοήσθω γὰρ ὁ κύκλος ἀναπεπληρωμένος, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ λ. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ λη. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ βδ τῇ λη, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν κθ τῇ ηθ, τὴν δὲ κδ τῇ δλ. ἐπεζεύχθω δὴ ἥ τε αλ καὶ ἡ λγ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αλγ, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, καὶ κάθετος ἡ λμ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ μα, τουτέστιν ἡ γμ πρὸς μα, οὕτως τὸ ἀπὸ αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη. κοινὸς προσκείσθω ὁ τῆς αμ πρὸς μη λόγος. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς γμ πρὸς μα, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, τουτέστιν ὁ τῆς γμ πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. καὶ ὁ τῆς γμ ἄρα πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, οὕτως ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ αμ πρὸς μη, ἡ αδ πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς δε, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον. τῶν ἄρα ὀφειλουσῶν εὑρεθῆναι δύο μέσων ἀνάλογον τῶν βδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν βδ πρὸς δθ, τὴν θδ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται καὶ ἡ τρίτη εὑρημένη. προσέχειν δὲ χρὴ ὡς καὶ ἡ τοιαύτη κατασκευὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Διοκλέους εἰρημένῃ, τούτῳ μόνον διαφέρουσα τῷ ἐκεῖνον μὲν γραμμήν τινα καταγράφειν διὰ συνεχῶν σημείων μεταξὺ τῶν α, β. ἐφ' ἧς ἐλαμβάνετο τὸ η, ἐκβαλλομένης τῆς γε, καὶ τεμνούσης τὴν εἰρημένην γραμμήν. ἐνταῦθα δὲ τὸ η πορίζεται, διὰ τοῦ ακ κανόνος κινουμένου περὶ τὸ α. ὅτι γὰρ τὸ η τὸ αὐτό ἐστιν, εἴτε ὡς ἐνταῦθα διὰ τοῦ κανόνος ληφθῇ, εἴτε ὡς ἔφη Διοκλῆς, μάθοιμεν ἂν οὕτως. ἐκβληθείσης τῆς μη κατὰ τὸ ν, ἐπεζεύχθω ἡ κν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ κθ τῇ θη, καὶ παράλληλος ἡ ην τῇ θβ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κξ τῇ ξν, καὶ κοινὴ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξβ. ἡ γὰρ κν δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, καὶ βάσις ἄρα βάσει ἴση. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ κβ περιφέρεια τῇ βν. τὸ ἄρα η ἐστὶ τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ Διοκλέους, καὶ ἡ ἀπόδειξις δὲ αὐτή ἐστιν. ἔφασκε γὰρ ὁ Διοκλῆς, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γμ πρὸς μν, οὕτως ἡ μν πρὸς μα. καὶ ἡ αμ πρὸς μη. ἴση δέ ἐστιν ἡ νμ τῇ μλ. ἡ γὰρ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γμ πρὸς μλ, οὕτως ἡ λμ πρὸς μα, καὶ ἡ αμ πρὸς μη. τῶν ἄρα γμ, μη μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ λμ, μα. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ γμ πρὸς μλ, ἡ αμ πρὸς μη, τουτέστιν ἡ γδ πρὸς δθ. καὶ τῶν δύο μέσων ἄρα τῶν γδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ, ἥν τινα ἐπόρισεν καὶ ὁ Πάππος.

ΩΣ ΣΠΟΡΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, βγ. δεῖ δὴ τῶν αβ, βγ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ δβε, καὶ κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ δαε. καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ διήχθω τις εὐθεῖα οὕτως, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ηθ τῇ θκ. τοῦτο γὰρ δυνατόν. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν η, κ ἐπὶ τὴν δε κάθετοι αἱ ηλ, κμν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θη, ἡ μβ πρὸς βλ. ἴση δὲ ἡ κθ τῇ θη, ἴση ἄρα καὶ ἡ μβ τῇ βλ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ με τῇ λδ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ δμ τῇ λε ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ λε πρὸς εμ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ κμ πρὸς ηλ. ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εμ, ἡ ηλ πρὸς νμ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ δμ πρὸς μκ, ἡ κμ πρὸς με. ὡς ἄρα ἡ δμ πρὸς με, οὕτως τὸ ἀπὸ δμ πρὸς τὸ ἀπὸ μκ,

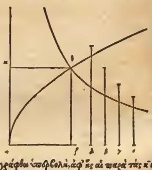


τουτέστι τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. ἴση γὰρ ἡ δβ τῇ βα.

τῇ βα. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ λε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ κμ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εβ, ἡ νλ πρὸς γβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ κμ πρὸς θβ, ἡ νλ πρὸς γβ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κμ πρὸς νλ, ἡ θβ πρὸς γβ. ἀλλ' ὡς ἡ κμ πρὸς νλ, ἡ μδ πρὸς δλ, τουτέστιν ἡ δμ πρὸς με, τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, ἡ βθ πρὸς βγ. εἰλήφθω τῶν θβ, βγ μέση ἀνάλογον ἡ ξ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, ἡ θβ πρὸς βγ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βθ. ἡ δὲ θβ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς ξ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ βθ πρὸς ξ. ἀλλ' ὡς ἡ θβ πρὸς ξ, ἡ ξ πρὸς βγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ θβ πρὸς ξ. καὶ ἡ ξ πρὸς βγ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ αὐτὴ ἡ αὐτή ἐστι, τῇ ὑπὸ πάππου καὶ διοκλέους γραμμῇ.

ΩΣ ΜΕΝΕΧΜΟΣ.

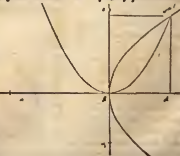
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ δ, ε. δεῖ δὴ τῶν δ, ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγονέτω καὶ ἔστωσαν αἱ β, γ. καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ αη, πεπερασμένη κατὰ τὸ α. καὶ πρὸς τῷ α τῇ γ ἴση κείσθω ἡ αζ. καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ζθ. καὶ τῇ β ἴση κείσθω ἡ ζθ. ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ δ, β, γ. τὸ ὑπὸ τῶν δ, γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β. τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς δ καὶ τῆς γ, τουτέστι τῆς αζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ζθ. ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τῆς θ, διὰ τοῦ α γεγραμμένης, ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ θκ, ακ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ β, γ. ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ δ, ε. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ κθζ. ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ. δοθὲν ἄρα τὸ θ, ὥστε καὶ τὸ ζ. συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ δ, ε. ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ αη πεπερασμένη κατὰ τὸ α, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ α παραβολή. ἧς ἄξων μὲν ἡ αη, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ δ. αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν αη ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν δ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ α σημείῳ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ αθ.



καὶ ὀρθὴ ἡ ακ, καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ' ἧς αἱ παρὰ τὰς κα, αζ ἀχθεῖσαι ποιήσουσι τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ δε, τέμνει δὴ τὴν παραβολήν. τεμνέτω κατὰ τὸ θ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ θκ, θζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ζθ, ἴσον τῷ ὑπὸ δγ, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ δε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζα, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζα πρὸς τὴν ε. ἀλλ' ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα, καὶ ἡ ζα πρὸς ε. κείσθω τῇ μὲν θζ ἴση ἡ β, τῇ δὲ αζ ἴση ἡ γ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ πρὸς τὴν β, ἡ β πρὸς τὴν γ, καὶ ἡ γ πρὸς ε. αἱ δ, β, γ, ε ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ αβ, βγ. καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ δβ, βε. ὥστε εἶναι, ὡς τὴν γβ πρὸς βδ, οὕτως τὴν βδ πρὸς βε, καὶ τὴν βε πρὸς βα. καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ δζ, εζ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δβ πρὸς βε. τὸ ἄρα ὑπὸ γβε, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, τουτέστι τῆς εζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εζ, τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν βε. πάλιν ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς βε, ἡ βε πρὸς βδ. τὸ ἄρα ὑπὸ αβδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βδ, ἴσον ἐστὶ



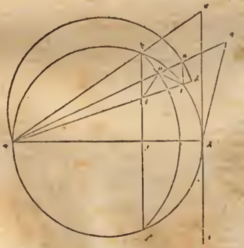
τῷ

τῷ ἀπὸ ε Β, τουτέστι τῇ δ ζ. τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς περὶ ἄξονα τὴν Β δ. ἅπτεται δὲ καὶ ὑπερβολῆς δοθείσης περὶ τὴν Β ζ. δοθὲν ἄρα τὸ ζ, καὶ κάθετοι αἱ ζ δ, ζ ε. καὶ δοθέντα τὰ δ, ε. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ α Β, Β γ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον ἀπὸ τοῦ Β, Β δ, Β ε. καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν Β ε παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν Β ε, δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν Β γ. πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν δ Β παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν α Β. τέμνουσι δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ζ δ, ζ ε. ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζ ε, τουτέστιν ἡ δ Β, τὸ ἄρα ὑπὸ γ Β ε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Β δ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ Β πρὸς Β δ, ἡ δ Β πρὸς Β ε. πάλιν ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζ δ, τουτέστιν ἡ ε Β, τὸ ἄρα ὑπὸ δ Β α ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ε Β. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ Β πρὸς Β ε, ἡ Β ε πρὸς Β α. ἀλλ' ὡς ἡ δ Β πρὸς Β ε, οὕτως ἡ γ Β πρὸς Β δ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ Β πρὸς Β δ, ἡ Β δ πρὸς Β ε, καὶ ἡ ε Β πρὸς Β α. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν Ἥρωνος καμαρικῶν.

Η ΑΡΧΙΤΟΥ ΕΥΡΕΣΙΣ, ΩΣ ΕΥΔΗ μος ἱστορεῖ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α δ, γ. δεῖ δὴ τῶν α δ, γ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγράφθω περὶ τὴν μείζονα τὴν α δ κύκλος, ὁ α Β δ ζ, καὶ τῇ γ ἴση ἐνηρμόσθω ἡ α Β. καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ἀπὸ τοῦ δ, ἐφαπτομένῃ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ π. παρὰ δὲ τὴν π δ ο ἤχθω ἡ Β ε ζ. καὶ νενοήσθω ἡμικυλίνδριον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ α Β δ ἡμικυκλίου. ἐπὶ δὲ τῆς α δ ἡμικύκλιον ὀρθόν, ἐν τῷ τοῦ ἡμικυλινδρίου παραλληλογράμμῳ κείμενον. τοῦτο δὴ τὸ ἡμικύκλιον περιαγόμενον ὡς ἐκ τοῦ δ ἐπὶ τὸ Β μένοντος τοῦ α πέρατος τῆς διαμέτρου τεμεῖ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐν τῇ περιαγωγῇ, καὶ γράψει ἐν αὐτῇ γραμμήν τινα. πάλιν δὲ ἐὰν τῆς α δ



μενούσης τὸ α π δ τρίγωνον περιενεχθῇ τὴν ἐναντίαν τῷ ἡμικυκλίῳ κίνησιν, κωνικὴν ποιήσει ἐπιφάνειαν τῇ α π εὐθείᾳ, ἣ δὴ περιαγομένη συμβαλεῖ τῇ κυλινδρικῇ γραμμῇ κατά τι σημεῖον. ἅμα δὲ καὶ τὸ Β περιγράψει ἡμικύκλιον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. ἐχέτω δὴ θέσιν κατὰ τὸν τόπον τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν τὸ κινούμενον ἡμικύκλιον, ὡς τὴν τοῦ δ κ α. τὸ δὲ

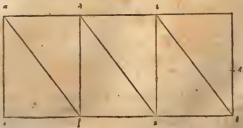
αἰτὸ

αὐτῇ περιαγόμενον τρίγωνον τὴν τῆς δλα. τὸ δὲ τῆς εἰρημένης συμπτώσεως σημεῖον ἔστω τὸ κ. ἔστω δὲ καὶ τὸ διὰ τοῦ Β γραφόμενον ἡμικύκλιον τὸ Β μ ζ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τοῦ Β δ ζ α κύκλου ἔστω ἡ Β ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὸ τοῦ Β δ α ἡμικυκλίου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω. πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, διὰ τὸ ὀρθὸν ἑστάναι τὸν κύλινδρον. πιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ κι. καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ι ἐπὶ τὸ α ἐπιζευχθεῖσα συμβαλέτω τῇ Β ζ κατὰ τὸ θ. ἡ δὲ α λ τῷ Β μ ζ ἡμικυκλίῳ κατὰ τὸ μ. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ κ δ, μ ι, μ θ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν δ κ α, Β μ ζ ἡμικυκλίων ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ μ θ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ὥστε καὶ πρὸς τὴν Β ζ ὀρθή ἐστιν ἡ μ θ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θ Β, θ ζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ α, θ ι, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ μ θ. ὅμοιον ἐστὶν ἄρα τὸ α μ ι τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν μ ι θ, μ α θ. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ι μ α. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δ κ α ὀρθή. παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ κ δ, μ ι. καὶ ἔσται ἀνάλογον ὡς ἡ δ α πρὸς α κ, τουτέστιν ἡ κ α πρὸς α ι, οὕτως ἡ ι α πρὸς α μ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. τέσσαρες ἄρα αἱ δ α, α κ, α ι, α μ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι. καί ἐστιν ἡ α μ ἴση τῇ γ. ἐπεὶ καὶ τῇ α Β. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν α δ, γ, δύο μέσαι ἀνάλογον ηὕρηνται αἱ α κ, α ι.

ΩΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ.

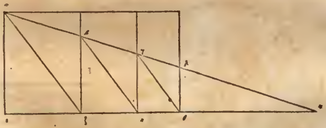
Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ ἐρατοσθένης χαίρειν.

Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν φασὶν, εἰσαγαγεῖν τὸν μίνω τῷ γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ ὅτι πανταχοῦ ἑκατόμπεδος εἴη, εἰπεῖν, μικρόν γ᾽ ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου, διπλάσιον ἔστω. τοῦ δὲ τοῦ κύβου μὴ σφαλεὶς, διπλασιάζων ἕκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου, ἐδόκει διημαρτηκέναι. τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθεισῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὲ καὶ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, τίνα ἄν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειεν. καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, κύβου διπλασιασμός. ὑποθέμενοι γὰρ κύβον, ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτος ἱπποκράτης ὁ χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονός ἐστι διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτοῦ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν. μετὰ χρόνον δέ τινάς φασιν δηλίους ἐπιβαλλομένης νόσου κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι τινὰ τῶν βωμῶν ἐπιταχθέντας, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα. διαπεμψαμένους δὲ τοὺς παρὰ τῷ πλάτωνι ἐν ἀκαδημίᾳ γεωμέτρας, ἀξιοῦν αὐτοῖς εὑρεῖν τὸ ζητούμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοῖς, καὶ ζητούντων, δύο δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, ἀρχύτας μὲν ὁ ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν. συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι. χειρουργῆσαι δὲ, καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι, πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τοῦ μεναίχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δέ τις ὑφ᾽ ἡμῶν ὀργανικὴ ῥᾳδία, δι᾽ ἧς εὑρήσομεν, δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ᾽ ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. τούτου δὲ εὑρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα. ὥστε καὶ βωμοὺς, καὶ ναοὺς δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα, καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν ἢ μέδιμνον εἰς κύβον καθιστάναι, καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα πόσον χωρεῖ. χρήσιμον δὲ ἔσται τὸ ἐπινόημα, καὶ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ καὶ λιθόβολα ὄργανα. δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηθῆναι, καὶ τὰ πάχη καὶ τὰ μεγέθη, καὶ τὰς κατατρήσεις, καὶ τὰς χοινικίδας, καὶ τὰ ἐμβαλλόμενα νεῦρα, εἰ μέλλει καὶ ἡ βολὴ ἀνάλογον ἐπαυξηθῆναι. ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γενέσθαι ἄνευ τῆς τῶν μέσων εὑρέ-



σεως. ἡ δὲ ἀπόδειξις καὶ τὴν κατασκευὴν τοῦ λεχθέντος ὀργάνου ὑπογέγραφέ σοι. δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ αε, δθ. καὶ κείσθω ἐπί τινος εὐθείας τῆς εθ πρὸς ὀρθὰς ἡ αε. καὶ ἐπὶ τῆς εθ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς, τὰ αζ, ζι, ιθ. καὶ ἤχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς, αἱ αζ, λη, ιθ. ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι. μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ζι συνωσθήτω, τὸ μὲν αζ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ιθ ὑποκάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἕως οὗ γένηται τὰ α, β, γ, δ κατ᾽ εὐθεῖαν. καὶ διήχθω διὰ τῶν α, β, γ, δ σημείων εὐθεῖα. καὶ συμπιπτέτω τῇ εθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ κ. ἔσται δὴ ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, ζβ παραλλήλοις, ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ ακ πρὸς κβ, ἡ εκ πρὸς κζ, καὶ ἡ κζ πρὸς κη. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ βκ πρὸς κγ, ἐν μὲν ταῖς βζ, γη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ἐν δὲ ταῖς βη, γθ παραλλήλοις ἡ ηκ πρὸς κθ. ὡς ἄρα ἡ βκ πρὸς κγ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ εκ πρὸς κζ. καὶ ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ αε πρὸς βζ. ὡς δὲ ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ βζ πρὸς γη. ὡς δὲ ἡ ηκ πρὸς κθ, ἡ γη πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς βζ, ἡ βζ πρὸς γη, καὶ ἡ γη πρὸς δθ. ηὕρηνται ἄρα τῶν αε, δθ δύο μέσαι, ἥτε βζ καὶ ἡ γη.

Ταῦτα οὖν ἐπὶ τῶν γεωμετρουμένων ἐπιφανειῶν ἀποδέδεικται. ἵνα δὲ καὶ ὀργανικῶς δυνώμεθα τὰς δύο μέσας λαμβάνειν, διαπήγνυται πλινθίον ξύλινον, ἢ ἐλεφάντινον, ἢ χαλκοῦν ἔχον τρεῖς πινακίσκους ἴσους ὡς λεπτοτάτους. ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσται, οἱ δὲ δύο ἐπωσοί εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσι καὶ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσι. τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται. πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέστερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένῃ πάντα καὶ ἄσχαστα, καὶ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις. ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι, τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἐστι, καὶ καθήρμοσται ὑπ᾽ αὐτὴν τὴν στεφάνην τῆς στήλης προσμεμολυβδοχημένον, ὑπ᾽ αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη καὶ τὸ σχῆμα, μετ᾽ αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα. ὑπογεγράφθω οὖν σοι καὶ ταῦτα, ἵνα ἔχεις καὶ ὡς ἐν τῷ ἀναθήματι. τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ στήλῃ.

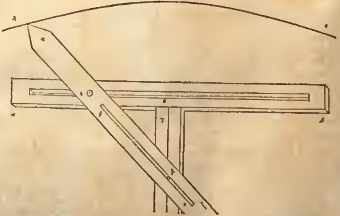


Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. δεδόσθωσαν αἱ αε, δθ. συνάγω δὴ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ᾽ εὐθεῖαν γένηται τὰ α, β, γ, δ σημεῖα. νοείσθω δὴ ὡς ἔχει ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, βζ παραλλήλοις ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη, ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ κζ πρὸς κη. ὡς δὲ αὗται πρὸς ἀλλήλας, ἥτε αε πρὸς βζ, καὶ ἡ βζ πρὸς γη. ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἡ ζβ πρὸς γη, ἡ γη πρὸς δθ. ἀνάλογον ἄρα αἱ αε, βζ, γη, δθ. ηὕρηνται ἄρα δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσαι. ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσι ταῖς αε, δθ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς αε, δθ, τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας, καὶ ἐπανοίσομεν ἐπ᾽ ἐκείνας, καὶ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν. ἐὰν δὲ πλείους μέσας ἐπιταχθῇ εὑρεῖν, ἀεὶ ἑνὶ πλείους πινακίσκους κατασκευασόμεθα ἐν τῷ ὀργάνῳ τῶν ληφθησομένων μέσων, ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλάσιον ὦγαθὲ τεύχειν
φράζεαι, τὴν στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν.
Εὖ μεταμορφῶσαι, τό δ' ἐστι πάρα κἂν σύ γε μάνδρην
† σιρὸν Ἢ † σῆρον, ἢ κοίλου φρέατος εὐρὺ κύτος.
Τῇ δ' ἀναμετρήσαιο μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
Συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλῃς κανόνων.
Μὴ δὲ σύ γ' ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων,
Μὴ δὲ μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
Δίζηαι. μὴ δ' εἴ τι θεουδέος εὐδόξοιο,
Κάμπυλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
Τοῖσδε γὰρ ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις,
Ῥεῖά κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
Εὐαίων πτολεμαῖε πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
Πάνθ' ὅσα καὶ μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα.
Αὐτὸς ἐδωρήσω τὸ δ' ἐς ὕστερον οὐράνιε ζεῦ.
Καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
Καὶ τὰ μὲν ὡς τελέοιτο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
Τοῦ κυρηναίου τοῦτ' ἐρατοσθένεος.

ΩΣ ΝΙΚΟΜΗΔΗΣ ΕΝ ΤΩ. ΠΕΡΙ ΚΟΓ-χοειδῶν γραμμῶν.

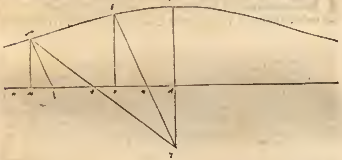
Γράφει δὲ καὶ νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ πρὸς αὐτοῦ περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἀποπληροῦντος. ἐφ' ὃ καὶ μεγάλα μὲν σεμνυνόμενος φαίνεται ὁ ἀνήρ, πολλὰ δὲ τοῖς ἐρατοσθένους ἐπεγγελῶν εὑρήμασιν, ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις, ἔτι δὲ καὶ ἐλλείποις. τῶν τοίνυν περὶ τὸ πρόβλημα πεπονηκότων ἕν τι πρὸς ἐρατοσθένη συγκρίσεως ἕνεκα, καὶ αὐτὸν τοῖς ἤδη γεγραμμένοις συνάπτομεν δυνάμει γράφοντα οὕτως. Νοεῖν χρὴ κανόνας δύο πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις συμβεβλημένους οὕτως



ὥστε μίαν ἀποσώζειν αὐτοὺς ἐπιφάνειαν. καθάπερ εἰσὶν οἱ αβ, γδ. ἐν δὲ τῷ αβ σωλὴν πελεκινοειδῆ, ἐν ᾧ χελώνιον διατρέχειν δυνήσεται. ἐν δὲ τῷ γδ κατὰ τὸ μέρος τὸ πρὸς τὸ δ, καὶ μέσην τὴν διαιροῦσαν εὐθεῖαν τὸ πλάτος αὐτοῦ κυλίνδριον συμφυὲς τῷ κανόνι, καὶ βραχὺ ὑπερέχον

ὑπερέχον τῆς ἄνωθεν ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ κανόνος. ἄλλον δὲ κανόνα ὡς τὸν ΕΖ μετὰ βραχύ τι διάστημα τοῦ πρὸς τὸ Ζ πλάτος ἀνατομὴν ἔχοντα, ὡς τὴν ΗΘ, δυναμένην περιβαίνειν τοῦ πρὸς τῷ Δ κυλινδρίῳ. πρὸς δὲ τῷ Ε ὀπὴν στρογγύλην, ἥ τις ἐγκλεισθήσεται εἰς τὸν ἀξονίσκον, συμφυῆ τῷ διατρέχοντι χελωναρίῳ ἐν τῷ πελεκινοειδεῖ σωλῆνι, τῷ ὄντι ἐν τῷ ΑΒ κανόνι. ἐναρμοσθέντος τοίνυν τοῦ ΕΖ κανόνος, κατὰ μὲν τὴν ΗΘ ἀνατομὴν, ἐν τῷ πρὸς τῷ Δ κυλινδρίῳ, κατὰ δὲ τὴν Ε ὀπὴν ἐν τῷ ἀξονίῳ τῷ συμφυεῖ τῷ χελωναρίῳ, ἐάν τις ἐπιλαβόμενος τοῦ Κ ἄκρου τοῦ κανόνος κινῇ αὐτὸν ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Α μέρη, ἔπειτα πρὸς τὸ Β, τὸ μὲν Ε σημεῖον ἀεὶ ἐπὶ τοῦ ΑΒ κανόνος ἐνεχθήσεται, ἡ δὲ ΗΘ ἀνατομὴ ἐπὶ τοῦ πρὸς τῷ Δ κυλινδρίου κινηθήσεται, ἀεὶ τῆς μέσης τοῦ ΕΖ κανόνος εὐθείας ἐν τῇ κινήσει διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ πρὸς τῷ Δ κυλίνδρου νοουμένης. τῆς δὲ ΕΚ ὑπεροχῆς τοῦ κανόνος ἀεὶ τῆς αὐτῆς μενούσης. ἐὰν τοίνυν πρὸς τῷ Κ ἐπινοήσωμεν τι γραφεῖον ἐπαπτόμενον τοῦ ἐδάφους, γραφήσεται τις γραμμὴ, οἵα ἐστὶν ἡ ΛΜΝ, ἥν τινα καλεῖ Νικομήδης κοχλοειδῆ πρώτην γραμμὴν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ ΕΚ μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ Δ.

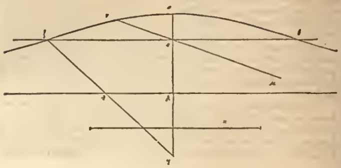
Ταύτῃ δὴ τῇ γραμμῇ συμβαῖνον δείκνυσι τὸ ἀεὶ ἐπ' ἔλαττον μὲν συμπορεύεσθαι τῷ ΑΒ κανόνι. καὶ ἐάν τις εὐθεῖα διαχθῇ μεταξὺ τῆς τε γραμμῆς καὶ τοῦ ΑΒ κανόνος, ὅτι πάντως τέμνει τὴν γραμμὴν, καὶ τὸ μὲν πρότερον τῶν συμβαινόντων ἐστὶν εὐκατανόητον, ἐφ' ἑτέρας καταγραφῆς. κανόνος τε νοουμένου τοῦ ΑΒ. πόλου δὲ τοῦ Γ, διαστήματος δὲ τοῦ ΔΕ, γραμμῆς δὲ κοχλοειδοῦς τῆς ΖΕΗ. προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ Γ δύο αἱ ΓΘ, ΓΖ ἴσων, δῆλον ὅτι γινομένων τῶν



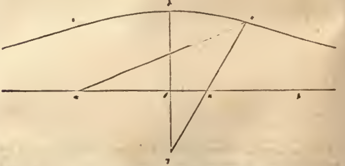
ΚΘ, ΛΖ. λέγω ὅτι ἡ ΖΜ κάθετος ἐλάττων τῆς ΘΝ καθέτου. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς ὑπὸ ΜΛΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΝΚΓ, λοιπὴ ἡ λειπομένη εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΜΛΖ λοιπῆς τῆς ὑπὸ ΝΚΘ ἐστὶν ἐλάσσων, καὶ διὰ τοῦτο ὀρθῶν οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς Μ, Ν, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τὸ Ζ τῆς πρὸς τῷ Θ. καὶ ἐὰν τῇ πρὸς τὸ Θ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ ΜΖΞ, ἡ ΚΘ, τουτέστιν ἡ ΛΖ πρὸς ΘΝ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἡ ΞΖ πρὸς ΖΜ. ὥστε ἡ ΖΛ πρὸς τὴν ΘΝ ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ΖΜ. καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἡ ΘΝ τῆς ΖΜ.

Τὸ δὲ δεύτερον ἦν τὸ τὴν διαγομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε ΑΒ καὶ τῆς γραμμῆς τέμνειν τὴν γραμμὴν, καὶ τοῦτο δὲ οὕτω γίνεται γνώριμον. ἡ γὰρ διαγομένη, ἤτοι παράλληλός ἐστι τῷ ΑΒ ἢ οὔ. ἔστω πρότερον παράλληλος ὡς ἡ ΖΗΘ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΔΗ πρὸς ΗΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν Κ. καὶ κέντρῳ τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ Κ περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΗ πρὸς ΗΓ, οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς ΖΓ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΗ πρὸς ΗΓ, οὕτως ἦν ἡ ΔΕ πρὸς τὴν Κ, τουτέστι τὴν ΓΖ. ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΛΖ ἀδύνατον. δεῖ γὰρ εἶναι τὸ Ζ πρὸς τῇ γραμμῇ. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ διαγομένη παράλληλος.

καὶ ἴσαι ὡς ἡ μθ τῇ ν. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ η παράλληλος τῇ αβ, ἡ ζη. ἡ ἄρα ζθ συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, ὥστε πολλῷ μᾶλλον ἡ μν. τούτων δὲ ὄντων τῶν παρακολουθημάτων διὰ τοῦ ὀργάνου τὸ χρήσιμον εἰς τὸ προκείμενον δείκνυται οὕτως.



Πάλιν γωνίας δοθείσης τῆς α, καὶ σημείου ἐκτὸς τοῦ γ, διάγειν τὴν γη, καὶ ποιεῖν τὴν κη ἴσην τῇ δοθείσῃ. ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ γ σημείου ἐπὶ τὴν αβ, ἡ γθ. καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ δοθείσῃ ἴση ἔστω ἡ δθ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ δοθέντι τῷ δθ, κανόνι

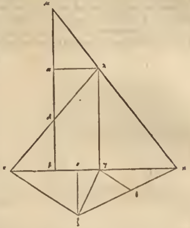


δὲ τῷ αβ, γεγράφθω κογχοειδὴς γραμμὴ πρώτη ἡ εδζ. συμβάλλει ἄρα τῇ αη, διὰ τὸ προδειχθέν, συμβαλλέτω κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γη. ἴση ἄρα ἡ κη τῇ δοθείσῃ.

Τούτων δειχθέντων, δεδόσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γλ, λα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εὑρεῖν. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αβγλ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, τοῖς δ, ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἡ δλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ γβ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η. τῇ δὲ βγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εζ, καὶ προσβεβλήσθω ἡ γζ ἴση οὖσα τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη, καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ γθ. καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν κγθ, ἀπὸ δοθέντος τοῦ ζ, διήχθω ἡ ζθκ, ποιοῦσα ἴσην τὴν θκ τῇ αδ, ἢ τῇ γζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν, ἐδείχθη διὰ τῆς κογχοειδοῦς. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ αβ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ μ. λέγω ὅτι ἐστὶν, ὡς ἡ γλ πρὸς κγ, ἡ κγ πρὸς μα,

καὶ

καὶ ἡ μα πρὸς τὴν αλ. ἐπεὶ ἡ βγ τέτμηται δίχα τῷ ε. καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ κγ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εκ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τῶν ἀπὸ γε εζ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ γζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ κε εζ, τουτέστι τῷ ἀπὸ κζ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ μα πρὸς αβ, ἡ μλ πρὸς λκ. ὡς δὲ ἡ μλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ μα πρὸς αβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ἔστι τῆς μὲν αβ ἡμίσεια ἡ αδ, τῆς δὲ βγ διπλῆ ἡ γη. ἐπεὶ καὶ ἡ λγ τῆς αδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ μα πρὸς αδ, οὕτως ἡ ηγ πρὸς γκ. ἀλλ' ὡς ἡ ηγ πρὸς γκ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θκ, διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ηζ, γθ. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ μδ πρὸς δα, ἡ ζκ πρὸς κθ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ αδ τῇ θκ, ἐπεὶ καὶ τῇ γζ ἴση ἐστὶν ἡ αδ. ἴση ἄρα καὶ ἡ μδ τῇ ζκ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ μδ, τὸ ἀπὸ ζκ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ μδ, ἴσον τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ δα. τῷ δὲ ἀπὸ ζκ, ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ.

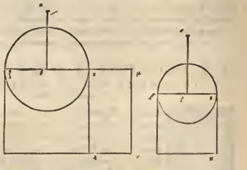


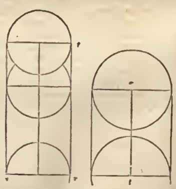
ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ λδ, τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ, ὧν τὸ ἀπὸ αδ ἴσον τῷ ἀπὸ γζ. ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ αδ τῇ γζ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ βμα τῷ ὑπὸ βκγ, ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βκ, ἡ κγ πρὸς αμ. ἀλλ' ὡς ἡ βμ πρὸς βκ, ἡ γλ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γλ πρὸς γκ, οὕτως ἡ γκ πρὸς αμ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς αλ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ γκ πρὸς αμ, καὶ ἡ αμ πρὸς αλ.

ΕΙΣ ΤΟ Β. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Καὶ συνθέντι, ὡς ἡ δθ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε. τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς γὰρ ἐπὶ αὐτῶν ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ γβα, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ βε, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς αβ, ἡ βα πρὸς αε, καὶ ἡ γβ πρὸς βε. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως ἡ γα πρὸς αε, ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αε, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δείκνυται, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς γε, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ βε. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἐστὶ πάλιν, ὡς ἡ μὲν αγ πρὸς γβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γε. τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. καὶ ὡς ἄρα ἡ αγ πρὸς γε, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. εἶτα ἐφεξῆς δεικνύναι πειρώμενος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας, ἴσον τὸν βκζ κῶνον. ἐκθέμενος κῶνον τὸν ν, βάσιν μὲν ἔχοντα ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. φησὶν ὅτι ὁ ν κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ζαβθ στερεῷ τομεῖ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἰστέον δὲ ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ οὐ τὸν τοιοῦτον τομέα ἀποδέδειχεν ἴσον ὄντα τῷ οὕτως λαμβανομένῳ, ἀλλὰ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐλάττονος ἡμισφαιρίου, ὅν τινα καὶ κυρίως ἐν τοῖς ὅροις τομέα στερεὸν καλεῖν ἐφαίνετο. ἔφασκεν γάρ, τομέα δὲ στερεὸν καλέω, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ τὰν κορυφὰν ἔχων ποτὶ τῷ κέντρῳ τᾶς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τᾶς τοῦ κώνου ἐπιφανείας τᾶς ἐντὸς τοῦ κώνου. τὸ δὲ νῦν προκείμενον σχῆμα περιέχεται μὲν ὑπὸ κωνικῆς ἐπιφανείας, τὴν κορυφὴν ἐχούσης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης τοῦ κώνου. ὅτι δὲ οὖν τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἴσον γίνεται τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ

παραλληλόγραμμον. τὸ ἄρα ζν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ζλ, καὶ ἡ μζ τῆς ζκ. συνεστάτω δὲ τῷ ζν παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ξπ. καὶ περὶ διάμετρον μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλος περιγεγράφθω. ἔσται δὴ ὁ ξο ἡμιόλιος τοῦ ζκ. οἱ γὰρ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῷ θκ, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ κυλίνδρου οὗ βάσις μὲν ὁ ζκ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ. εἰ δὲ κῶνος εἴη, ὁμοίως τὰ αὐτὰ ποιήσαντες, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ζν παραλληλογράμμου ἴσον συστησάμενοι τετράγωνον, ὡς τὸ ξπ. καὶ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλον γράψαντες, νοήσαιμεν ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρον ὕψος ἔχοντα τὴν θκ. ἕξομεν αὐτὸν ἡμιόλιον τοῦ προτεθέντος κώνου. ἐπεὶ γὰρ τὸ ζν παραλληλόγραμμον τοῦ ξπ τετραγώνου τριπλάσιον, τοῦ δὲ ζλ ἡμιόλιον, τὸ ζλ τοῦ ξπ ἔσται διπλάσιον. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὁ κύκλος τοῦ κύκλου διπλάσιος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὴν ζκ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ περὶ τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ κώνου. ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἡμιόλιός ἐστι τοῦ προκειμένου κώνου. εἰ δέοι μήτε τὸν ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι, μήτε τὴν βάσιν, γενήσεται τὸ πρόβλημα πάλιν διχῶς. ἢ γὰρ τὴν βάσιν ἕξει ἴσην τῇ δοθείσῃ, ἢ τὸν ἄξονα ὁ πορι-ζόμενος κύλινδρος. ἔστω γὰρ πρότερον ἡ βάσις δεδομένη, ὡς ὁ ξο κύκλος. καὶ δέον ἔστω κύλινδρον εὑρεῖν ἡμιόλιον τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἀπὸ βάσεως τῆς ξο, εἰλήφθω ὡς προείρηται τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος, βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ προτεθέντι ὁ φυ. καὶ γεγονέτω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ξο, πρὸς τὸ ἀπὸ τυ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ φυ πρὸς τὴν ρσ. ἔσται ἄρα ὁ κύλινδρος ὁ ἀπὸ τῆς ξο, βάσεως ὕψος ἔχων τὴν ρσ, ἴσος τῷ φυ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπίταγμα. εἰ δὲ μὴ ἡ βάσις ᾖ δεδομένη, ἀλλ' ὁ ἄξων τῷ αὐτῷ λόγῳ πορισθέντος τοῦ φυ, γενήσεται τὰ τῆς προτάσεως.





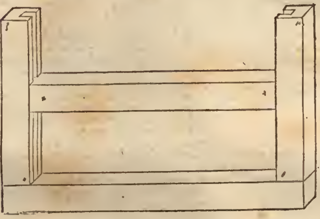
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Α.

Τούτου ληφθέντος, ἐπειδὴ ἐν ἀναλύσει αὐτῷ περιέβη τὰ τοῦ προβλήματος, λήξαντος τῆς ἀναλύσεως εἰς τὸ δεῖν δύο δοθεισῶν δύο μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, φησὶν ἐν τῇ συνθέσει εὑρήσθωσαν. τὴν δὲ εὕρεσιν τούτων ἐπ' αὐτοῦ μὲν γεγραμμένην, οὐδ' ὅλως εὑρίσκομεν. πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντυχήκαμεν, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομέναις, ὧν τὴν εὐδόξου τοῦ κνιδίου παρῃτησάμεθα γράφειν. ἐπειδή φησι μὲν ἐν προοιμίοις διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν ηὑρηκέναι. ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸς τὸ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ διῃρημένην ἀναλογίαν εὑρὼν, ὡς συνεχεῖ χρῆται, ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι. τί λέγω περὶ εὐ-δόξου,

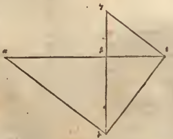
δέξω, ἀλλὰ περὶ τῶν καὶ μετρίως περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων. ἵνα δὲ ἡ τῶν εἰς ἡμᾶς ἐληλυθότων ἀνδρῶν ἔννοια ἐμφανὴς γένηται, ὁ ἑκάστου τῆς εὑρέσεως τρόπος καὶ ἐνταῦθα γεγράψεται.

ΩΣ ΠΛΑΤΩΝ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β, β γ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ δ, ε, καὶ κατεσκευάσθω ὀρθὴ γωνία ἡ ὑπὸ ζ η θ. καὶ ἐν ἑνὶ σκέλει, οἷον τῷ ζ η, κινείσθω κανὼν ὁ κ λ ἐν σωλῆνί τινι ὄντι ἐν τῷ ζ η, οὕτως ὥστε παράλληλον αὐτὸν διαμένειν τῷ η θ. ἔσται δὲ τοῦτο, ἐὰν καὶ ἕτερον κανόνιον νοηθῇ συμφυὲς τῷ θ η, παράλληλον δὲ τῷ ζ η, ὡς τὸ θ μ. σωληνισθεισῶν γὰρ τῶν ἄνωθεν ἐπιφανειῶν τῶν ζ η, θ μ σωλῆσι πελεκινοειδέσι, καὶ τύλων συμφυῶν γενομένων τῷ κ λ, εἰς τοὺς εἰρημένους σωλῆνας, ἔσται ἡ κίνησις τοῦ κ λ παράλληλος ἀεὶ τῷ η θ. τούτων οὖν κατεσκευασμένων, κείσθω τὸ ἓν σκέλος τῆς γωνίας



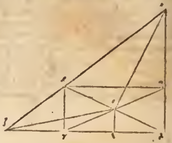
τυχὸν τὸ η θ, ψαῦον τοῦ γ, καὶ μεταφερέσθω ἥ τε γωνία καὶ ὁ κ λ κανὼν ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν τὸ μὲν η σημεῖον ἐπὶ τῆς β δ εὐθείας ᾖ, τοῦ η θ σκέλους ψαύοντος τοῦ γ. ὁ δὲ κ λ κανὼν κατὰ μὲν τὸ κ ψαύῃ τῆς β ε εὐθείας, κατὰ δὲ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ α. ὥστε εἶναι ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν θέσιν ἔχουσαν, ὡς τὴν ὑπὸ γ δ ε. τὸν δὲ κ λ κανόνα θέσιν ἔχειν, οἵαν ἔχει ἡ ε α. τούτων γὰρ γενομένων ἔσται τὸ προκείμενον. ὀρθῶν γὰρ οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς δ, ε, ἐστὶν ὡς ἡ γ β πρὸς β δ, ἡ δ β πρὸς β ε, καὶ ἡ ε β πρὸς β α.



ΩΣ ΗΡΩΝ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ, καὶ ἐν τοῖς Βελοποιικοῖς.

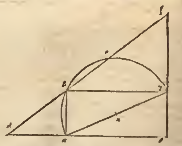
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β, β γ. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. κείσθωσαν ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ β δ παραλλη-

λληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ. φανερὸν δή, ὅτι ἴσαι εἰσὶ καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὁ γὰρ περὶ μίαν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν περάτων τῆς ἑτέρας, διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ δγ, δα ἐπὶ τὰ ζ, η, καὶ νοείσθω κανόνιον ὡς τὸ ζβη, κινούμενον περί τινα τύλον, μένοντα πρὸς τῷ β. καὶ κινείσθω ἕως ἀποτέμῃ ἴσας τὰς ἀπὸ τοῦ ε, τουτέστι τὰς εη, εζ. καὶ νοείσθω ἀποτεμόν, καὶ θέσιν ἔχον τὴν ζβη, ἴσων ὡς εἴρηται γενομένων τῶν εη, εζ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν γδ κάθετος ἡ εθ, δίχα δὴ τέμνει. δῆλον ὅτι τὴν γδ. ἐπεὶ οὖν δίχα τέμνεται ἡ γδ κατὰ τὸ θ, καὶ πρόσκειται ἡ γζ, τὸ ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γθ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ θζ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εθ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τῶν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ζθ, θε. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ γε. τοῖς δὲ ἀπὸ ζθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον τῷ ἀπὸ εζ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ δηα μετὰ τοῦ ἀπὸ αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εη. καί ἐστιν ἴση ἡ μὲν αε τῇ εγ, ἡ δὲ ηε τῇ εζ. καὶ τὸ ὑπὸ δζγ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δηα. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ αη πρὸς γζ. ἀλλ' ὡς ἡ ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ ζγ πρὸς γβ, καὶ ἡ βα πρὸς αη. τριγώνου γὰρ τοῦ ζδη παρὰ μίαν μὲν τὴν δη, ἦκται ἡ γβ. παρὰ δὲ τὴν δζ ἡ αβ. ὡς ἄρα ἡ βα πρὸς αη, οὕτως ἡ αη πρὸς γζ, καὶ ἡ γζ πρὸς γβ. τῶν ἄρα αβ, βγ, μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αη, γζ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΦΙΛΩΝ Ο ΒΥΖΑΝΤΙΟΣ.

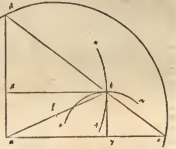
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, κείσθωσαν, ὥς τε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς αγ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ αβεγ. καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν, τῇ μὲν βα, ἡ αδ. τῇ δὲ βγ ἡ γζ. καὶ παρακείσθω κανὼν κινούμενος πρὸς τῷ β, τέμνων τὰς αδ γζ. καὶ κινείσθω περὶ τὸ β, ἄχρις ἂν ἡ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ δ ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ ζ, τουτέστι τῇ μεταξὺ τῆς τε περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς γζ. νενοήσθω οὖν ἔχον τὸ κανόνιον θέσιν, οἵαν ἔχει ἡ δβεζ, ἴσης οὔσης ὡς εἴρηται τῆς δβ τῇ εζ. λέγω ὅτι αἱ αδ, γζ μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν αβ, βγ. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ δα, ζγ, καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ θ. φανερὸν δὴ ὅτι παραλλήλων οὐσῶν τῶν βα, ζθ, ἡ πρὸς τῷ θ γωνία ὀρθή ἐστι. καὶ ὁ αεγ κύκλος ἀναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ τῇ εζ, καὶ τὸ ὑπὸ εδβ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βζε. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ εδβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θδα. ἑκάτερον γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ δ. τὸ δὲ ὑπὸ βζε ἴσον τῷ ὑπὸ θζγ. ἑκάτερον γὰρ ὁμοίως ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ ζ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ θδα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζγ. καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ δθ πρὸς θζ, οὕτως ἡ γζ πρὸς δα. ἀλλ' ὡς ἡ θδ πρὸς θζ, οὕτως ἥ τε βγ πρὸς γζ, καὶ ἡ δα πρὸς αβ. τριγώνου γὰρ τοῦ δθζ, παρὰ μὲν τὴν δθ, ἦκται ἡ βγ, παρὰ δὲ τὴν θζ ἡ βα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς ζγ, ἡ γζ πρὸς δα, ἡ δα πρὸς αβ, ὅπερ προέκειτο δεῖξαι.



ἰστέον δέ, ὅτι ἡ τοιαύτη κατασκευὴ σχεδὸν ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Ἥρωνος κατασκευῆς, καὶ αἱ προσεκβαλλόμεναι πλευραὶ αἱ θα, θγ. καὶ ὁ περὶ τὸ β κινούμενος κανών. ταύτῃ δὲ μόνον διαφέρει, ὅτι ἐκεῖ μὲν μέχρι τοσούτου ἐκινοῦμεν περὶ τὸ β τὸν κανόνα, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς αγ, τουτέστι τοῦ κ, ἴσαι ἀπ' αὐτοῦ ἀποτέμνοιντο πρὸς ταῖς θδ, θζ προσπιπτούσαις, ὡς αἱ κδ, κζ. ἐνταῦθα δὲ ἄχρις ἂν ἡ δβ ἴση γένηται τῇ εζ. ἐφ' ἑκατέρας δὲ κατασκευῆς τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ. τὸ δὲ νῦν εἰρημένον πρὸς χρῆσιν εὐθετώτερον. τὰς γὰρ δβ, εζ ἴσας τηρεῖν ἐνδέχεται διῃρημένου τοῦ δζ κανόνος εἰς ἴσα καὶ συνεχῆ. πολὺ γὰρ δυσκολώτερον τοῦ καρκίνου διαπειράζειν τὰς ἀπὸ τοῦ κ ἴσας πρὸς τὰ δ, ζ.

ΩΣ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ.

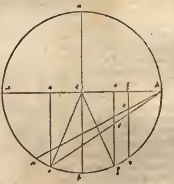
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ αβγ, ὀρθὴν περιέχουσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ αγ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ κθλ. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ αβ κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ μθν. καὶ τεμνέτω τὴν κθλ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θβ, θγ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ αγ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θα. τετμήσθω δίχα ἡ θα τῷ ξ, καὶ κέντρῳ τῷ ξ γεγράφθω κύκλος τέμνων τὰς αβ, αγ ἐκβληθείσας κατὰ τὰ δ, ε. ὥστε μέντοι τὰ δ, ε ἐπ' εὐθείας εἶναι τῷ θ, ὅπερ ἂν γένοιτο κανονίου κινουμένου περὶ τὸ θ, τέμνοντος τὰς αδ, αε. καὶ παραγομένου ἐπὶ τοσοῦτον ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὰ δ, ε ἴσαι γένωνται. τούτου γὰρ γενομένου ἔσται τὸ ζητούμενον. ἡ γὰρ αὐτὴ κατασκευή ἐστι τῇ τε ὑπὸ Ἥρωνος καὶ Φίλωνος



γεγραμμένῃ. καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει.

ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

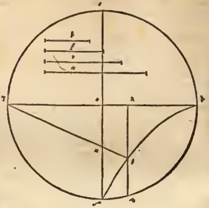
Ἐν κύκλῳ ἤχθωσαν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς αἱ αβ, γδ, καὶ δύο περιφέρειαι ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ β αἱ εβ, βζ. καὶ διὰ τοῦ ζ παράλληλος τῇ αβ ἤχθω ἡ ζη. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε. λέγω ὅτι τῶν γη, ηθ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ζη, ηδ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ ε τῇ αβ παράλληλος ἡ εκ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν εκ τῇ ζη, ἡ δὲ κγ τῇ ηδ. ἔσται γὰρ τοῦτο δῆλον ἐκ τοῦ λ ἐπὶ τὰ ε, ζ ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ὑπὸ γλε, ζλδ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς κ, η. καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν διὰ τὴν λε τῇ λζ ἴσην εἶναι, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ γκ τῇ ηδ, ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δκ πρὸς κε, ἡ δη πρὸς ηθ, ἀλλ' ὡς ἡ δκ πρὸς κε, ἡ εκ πρὸς κγ. μέση γὰρ ἀνάλογόν ἐστιν ἡ εκ τῶν δκ, κγ. ὡς ἄρα ἡ δκ πρὸς κε, καὶ ἡ εκ πρὸς κγ, οὕτως ἡ δη πρὸς ηθ. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ μὲν δκ τῇ γη, ἡ δὲ κε τῇ ζη, ἡ δὲ κγ τῇ ηδ. ὡς ἄρα ἡ γη πρὸς ηζ, ἡ ζη πρὸς ηδ, καὶ ἡ δη πρὸς ηθ. ἐὰν δὴ παρ' ἑκάτερα τοῦ β ληφθῶσι περιφέρειαι ἴσαι μβ, βν.



καὶ διὰ μὲν τοῦ ν παράλληλος ἀχθῇ τῇ αβ ἡ νξ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ δμ, ἔσονται πάλιν τῶν γξ, ξο μέσαι ἀνάλογον αἱ νξ, ξδ. πλειόνων οὖν οὕτως καὶ συνεχῶν παραλλήλων ἐκβληθεισῶν μεταξὺ

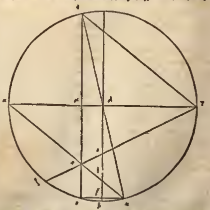
ξὺ τῶν β, δ. καὶ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπ' αὐτῶν περιφερείαις πρὸς τῷ β, ἴσων πλειόνων ἀπὸ τοῦ β ὡς ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐπὶ τὰ τεταγμένα σημεῖα ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ δ, ὡς τῶν ὁμοίως ταῖς δε, δμ, τμηθήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μεταξὺ τῶν β, δ κατά τινα σημεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὰ ο, θ. ἐφ' ἃ κανόνος παραθέσει ἐπιζεύξαντες εὐθείας, ἕξομεν καταγεγραμμένην ἐν τῷ κύκλῳ τινὰ γραμμήν. ἐφ' ἧς ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ λβ, καὶ ἡ ἀχθεῖσα, καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ δ, μέσαι ἀνάλογον ἔσονται τῆς τε ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ γ σημείῳ, καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ γραμμῇ σημείου ἐπὶ τὴν γδ διάμετρον.

Τούτων προκατεσκευασμένων, ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ α, β. καὶ ἔστω κύκλος ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γδ, εζ. καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμὴ ὡς προείρηται, ἡ δθζ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, ἡ γη πρὸς ηκ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γκ, καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ τῇ εζ παράλληλος ἤχθω ἡ λμ. διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν γλ, λθ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μλ, λδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ γλ πρὸς λθ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηκ. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηκ, οὕτως ἡ α πρὸς τὴν β. ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς γλ, λμ, λδ, λθ παρεμβάλωμεν μέσας τῶν α, β ὡς τὰς ν, ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν α, β μέσαι ἀνάλογον αἱ ν, ξ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΠΑΠΠΟΣ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ.

Προέθετο μὲν ὁ πάππος κύβον εὑρεῖν πρὸς τὸν δοθέντα κύβον, λόγον ἔχοντα δεδομένον. καὶ ὡς πρὸς τὴν τοιαύτην πρότασιν καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ἀποδείξεως αὐτοῦ περιέχεται. δῆλον δὲ ὅτι τούτου εὑρισκομένου, καὶ τὸ προκείμενον εὑρίσκεται. δύο γὰρ δοθεισῶν εὐθειῶν, ἐὰν ὀφειλουσῶν μέσων εὑρεθῆναι, ἡ δευτέρα εὑρεθῇ, καὶ ἡ τρίτη αὐτόθεν δοθήσεται. γεγράφθω γάρ, ὥς φησιν αὐτὸς κατὰ λέξιν, ἡμικύκλιον τὸ αβγ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δβ, καὶ κινείσθω κανόνιον περὶ τὸ α σημεῖον. ὥστε τὸ μὲν ἓν πέρας αὐτοῦ προκεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ α σημεῖον. τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινείσθω μεταξὺ τῶν β, γ. τούτων δὲ κατεσκευασμένων ἐπετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν, λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους τὸν ἐπιταχθέντα, καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς βδ πρὸς

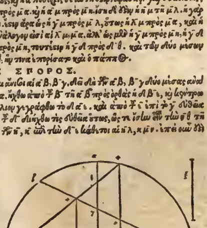


δε

δε. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. παρακείσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν β, γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ζ ε, ε β εὐθειῶν, ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς β ε εὐθείας, καὶ τῆς β κ γ περιφερείας. τοῦτο γὰρ πειράζοντες, καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον, ῥᾳδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δὴ καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν α κ, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς η θ, θ κ. λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς β δ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δ θ κύβον, λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστι τὸν τῆς β δ πρὸς δ ε. νενοήσθω γὰρ ὁ κύκλος ἀναπεπληρωμένος, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κ δ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ λ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λ η. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ β δ τῇ λ η, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν κ θ τῇ η θ, τὴν δὲ κ δ τῇ δ λ. ἐπεζεύχθω δὴ ἥ τε α λ καὶ ἡ λ γ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ α λ γ, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, καὶ κάθετος ἡ λ μ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ὑπὸ μ α, τουτέστιν ἡ γ μ πρὸς μ α, οὕτως τὸ ἀπὸ α μ πρὸς τὸ ἀπὸ μ η. κοινὸς προσκείσθω ὁ τῆς α μ πρὸς μ η λόγος. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς γ μ πρὸς μ α, καὶ τοῦ τῆς α μ πρὸς μ η, τουτέστιν ὁ τῆς γ μ πρὸς μ η λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς α μ πρὸς τὸ ἀπὸ μ η, καὶ τοῦ τῆς α μ πρὸς μ η. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς α μ πρὸς τὸ ἀπὸ μ η, καὶ τοῦ τῆς α μ πρὸς μ η, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς α μ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μ η. καὶ ὁ τῆς γ μ ἄρα πρὸς μ η λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς α μ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μ η. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γ μ πρὸς μ η, οὕτως ἡ γ δ πρὸς δ ε. ὡς δὲ ἡ α μ πρὸς μ η, ἡ α δ πρὸς δ θ. καὶ ὡς ἄρα ἡ β δ πρὸς δ ε, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς β δ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δ θ κύβον. τῶν ἄρα ὀφειλουσῶν εὑρεθῆναι δύο μέσων ἀνάλογον τῶν β δ, δ ε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δ θ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν β δ πρὸς δ θ, τὴν θ δ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται καὶ ἡ τρίτη εὑρημένη. προσέχειν δὲ χρὴ ὡς καὶ ἡ τοιαύτη κατασκευὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Διοκλέους εἰρημένῃ, τούτῳ μόνῳ διαφέρουσα τῷ ἐκεῖνον μὲν γραμμήν τινα καταγράφειν διὰ συνεχῶν σημείων μεταξὺ τῶν α, β, ἐφ' ἧς ἐλαμβάνετο τὸ η, ἐκβαλλομένης τῆς γ ε, καὶ τεμνούσης τὴν εἰρημένην γραμμήν. ἐνταῦθα δὲ τὸ η πορίζεται, διὰ τοῦ α κ κανόνος κινουμένου περὶ τὸ α. ὅτι γὰρ τὸ η τὸ αὐτό ἐστιν, εἴτε ὡς ἐνταῦθα διὰ τοῦ κανόνος ληφθῇ, εἴτε ὡς ἔφη Διοκλῆς, μάθοιμεν ἂν οὕτως. ἐκβληθείσης τῆς μ η κατὰ τὸ ν, ἐπεζεύχθω ἡ κ ν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ κ θ τῇ θ η, καὶ παράλληλος ἡ κ ν τῇ θ β, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κ ξ τῇ ξ ν, καὶ κοινὴ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξ β. ἡ γὰρ κ ν δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, καὶ βάσις ἄρα βάσει ἴση. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ κ β περιφέρεια τῇ β ν. τὸ ἄρα η ἐστὶ τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῆς Διοκλέους, καὶ ἡ ἀπόδειξις δὲ αὐτή ἐστιν. ἔφασκεν γὰρ ὁ Διοκλῆς, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γ μ πρὸς μ ν, οὕτως ἡ μ ν πρὸς μ α, καὶ ἡ α μ πρὸς μ η. ἴση δέ ἐστιν ἡ ν μ τῇ μ λ. ἡ γὰρ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ μ πρὸς μ λ, οὕτως ἡ λ μ πρὸς μ α, καὶ ἡ α μ πρὸς μ η. τῶν ἄρα γ μ, μ η μέσαι ἀνάλογον εἰσὶν αἱ λ μ, μ α. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γ μ πρὸς μ η, ἡ γ δ πρὸς δ ε. ὡς δὲ ἡ γ μ πρὸς μ λ, ἡ α μ πρὸς μ η, τουτέστιν ἡ γ δ πρὸς δ θ. καὶ τῶν δύο μέσων ἄρα τῶν γ δ, δ ε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δ θ, ἥν τινα ἐπορίσατο καὶ ὁ Πάππος.

ΩΣ ΣΠΟΡΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ α β, β γ. δεῖ δὴ τῶν α β, β γ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β τῇ α β πρὸς ὀρθὰς ἡ δ β ε, καὶ κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ β α ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ δ α ε. καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ διήχθω τις εὐθεῖα οὕτως, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν η θ τῇ θ κ. τοῦτο γὰρ δυνατόν. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν η, κ ἐπὶ τὴν δ ε κάθετοι αἱ η λ, κ μ ν. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ κ θ πρὸς θ η, ἡ μ β πρὸς β λ. ἴση δὲ ἡ κ θ τῇ θ η, ἴση ἄρα καὶ ἡ μ β τῇ β λ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ μ ε τῇ λ δ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ δ μ τῇ λ ε ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ μ δ πρὸς δ λ, ἡ λ ε πρὸς ε μ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μ δ πρὸς δ λ, ἡ κ μ πρὸς η λ, ὡς δὲ ἡ λ ε πρὸς ε μ, ἡ η λ πρὸς ν μ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ δ μ πρὸς μ κ, ἡ κ μ πρὸς μ ε, ὡς ἄρα ἡ δ μ πρὸς μ ε, οὕτως τὸ ἀπὸ δ μ πρὸς τὸ ἀπὸ μ κ,

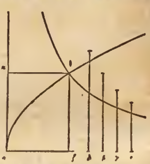


τουτέστι τὸ ἀπὸ δ β πρὸς τὸ ἀπὸ β θ, τουτέστι τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β θ. ἴση γὰρ ἡ δ β τῇ β α.

τῆς β α. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μ δ πρὸς δ β, ἡ λ ε πρὸς ε β. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μ δ πρὸς δ β, ἡ κ μ πρὸς θ β. ὡς δὲ ἡ λ ε πρὸς ε β, ἡ π λ πρὸς γ β. καὶ ὡς ἄρα ἡ κ μ πρὸς θ β, ἡ π λ πρὸς γ β. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κ μ πρὸς π λ, ἡ θ β πρὸς γ β. ἀλλ' ὡς ἡ κ μ πρὸς π λ, ἡ μ δ πρὸς δ λ, τουτέστιν ἡ δ μ πρὸς μ ε, τουτέστι τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ β. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, ἡ β θ πρὸς β γ. εἰλήφθω τῶν θ β, β γ μέση ἀνάλογον ἡ ξ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β θ, ἡ θ β πρὸς β γ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β θ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β πρὸς β θ. ἡ δὲ θ β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θ β πρὸς ξ. καὶ ὡς ἄρα ἡ α β πρὸς β θ, ἡ β θ πρὸς ξ. ἀλλ' ὡς ἡ θ β πρὸς ξ, ἡ ξ πρὸς β γ. καὶ ὡς ἄρα ἡ α β πρὸς β θ, ἡ θ β πρὸς ξ. καὶ ἡ ξ πρὸς β γ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ αὐτὰ ἡ αὐτή ἐστιν, τῇ τε ὑπὸ πάππου καὶ διοκλέους γραμμῇ.

ΩΣ ΜΕΝΕΧΜΟΣ.

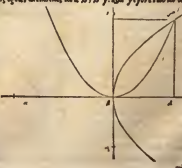
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ δ, ε. δεῖ δὴ τῶν δ, ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγονέτω καὶ ἔστωσαν αἱ β, γ. καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ α κ, πεπερασμένη κατὰ τὸ α. καὶ πρὸς τῷ α τῇ γ ἴση κείσθω ἡ α ζ. καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ζ θ. καὶ τῇ β ἴση κείσθω ἡ ζ θ. ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ δ, β, γ. τὸ ὑπὸ τῶν δ, γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β. τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς δ καὶ τῆς γ, τουτέστι τῆς α ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ζ θ. ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τῆς θ, διὰ τοῦ α γεγραμμένης, ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ θ κ, α κ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ β, γ. ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ δ, ε. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ κ θ ζ. ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κ α, α ζ. δοθὲν ἄρα τὸ θ, ὥστε καὶ τὸ ζ. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ δ, ε. ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ α κ πεπερασμένη κατὰ τὸ α, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ α παραβολή. ἧς ἄξων μὲν ἡ α κ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ δ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν α κ ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν δ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ α σημείῳ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ α θ.



καὶ ὀρθὴ ἡ α κ, καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κ α, α ζ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ' ἧς αἱ παρὰ τὰς κ α, α ζ ἀχθεῖσαι ποιήσουσι τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ δ ε. τέμνει δὴ τὴν παραβολήν. τεμνέτω κατὰ τὸ θ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ θ κ, θ ζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ζ θ, ἴσον τῷ ὑπὸ δ γ, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζ θ, ἡ ζ θ πρὸς ζ α. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ δ ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θ ζ α, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζ θ, ἡ ζ α πρὸς τὴν ε. ἀλλ' ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζ θ, ἡ ζ θ πρὸς ζ α, καὶ ἡ ζ α πρὸς ε. κείσθω τῇ μὲν θ ζ ἴση ἡ β, τῇ δὲ α ζ ἴση ἡ γ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ πρὸς τὴν β, ἡ β πρὸς τὴν γ, καὶ ἡ γ πρὸς ε. αἱ δ, β, γ, ε ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ α β, β γ. καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ δ β, β ε. ὥστε εἶναι, ὡς τὴν γ β πρὸς β δ, οὕτως τὴν β δ πρὸς β ε, καὶ τὴν β ε πρὸς β α. καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ δ ζ, ε ζ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δ β πρὸς β ε. τὸ ἄρα ὑπὸ γ β ε, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς β ε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β δ, τουτέστι τῆς ε ζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς β ε. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ε ζ, τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν β ε. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α β πρὸς β ε, ἡ β ε πρὸς β δ. τὸ ἄρα ὑπὸ α β δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς β δ, ἴσον ἐστὶ

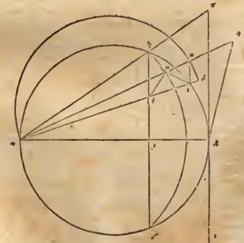


τῷ ἀπὸ ΕΒ, τουτέστι παρὰ ΔΖ. τὸ Ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΔ. ἐπεὶ δὲ καὶ ἑτέρας δοθείσης παρὰ τὴν ΒΖ. δοθὲν ἄρα τὸ Ζ, καὶ κάθετοι αἱ ΖΔ, ΖΕ. καὶ δοθέντα τὰ Δ, Ε. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον ἀπὸ τοῦ Β, ΒΔ, ΒΕ. καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν ΒΕ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν ΒΕ, δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν ΒΓ. πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν ΔΒ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ΑΒ. τέμνουσι δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΔ, ΖΕ. ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΔΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΔ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ. πάλιν ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ΖΔ, τουτέστιν ἡ ΕΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΒΕ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΒΔ πρὸς ΒΕ, καὶ ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν Ἥρωνος καμαρικῶν.

Η ΑΡΧΙΤΟΥ ΕΥΡΕΣΙΣ, ΩΣ ΕΥΔΗμος ἱστορεῖ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, Γ. δεῖ δὴ τῶν ΑΔ, Γ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγράφθω περὶ τὴν μείζονα τὴν ΑΔ κύκλος ὁ ΑΒΔΖ. καὶ τῇ Γ ἴση ἐνηρμόσθω ἡ ΑΒ. καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένῃ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Π. παρὰ δὲ τὴν ΠΔ ἤχθω ἡ ΒΕΖ. καὶ νενοήσθω ἡμικυλίνδριον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ ΑΒΔ ἡμικυκλίου. ἐπὶ δὲ τῆς ΑΔ ἡμικύκλιον ὀρθὸν ἐν τῷ τοῦ ἡμικυλινδρίου παραλληλογράμμῳ κείμενον. τοῦτο δὴ τὸ ἡμικύκλιον περιαγόμενον ὡς ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β μένοντος τοῦ Α πέρατος τῆς διαμέτρου τεμεῖ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐν τῇ περιαγωγῇ, καὶ γράψει ἐν αὐτῇ γραμμήν τινα. πάλιν δὲ ἐὰν τῆς ΑΔ



μενούσης τὸ ΑΠΔ τρίγωνον περιενεχθῇ τὴν ἐναντίαν τῷ ἡμικυκλίῳ κίνησιν, κωνικὴν ποιήσει ἐπιφάνειαν τῇ ΑΠ εὐθείᾳ, ἣ δὴ περιαγομένη συμβαλεῖ τῇ κυλινδρικῇ γραμμῇ κατά τι σημεῖον. ἅμα δὲ καὶ τὸ Β περιγράψει ἡμικύκλιον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. ἐχέτω δὴ θέσιν κατὰ τὸν τόπον τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν τὸ κινούμενον ἡμικύκλιον, ὡς τὴν τοῦ ΔΚΑ. τὸ δὲ

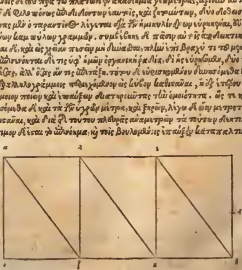
αὐτὸ

αὐτὸ περιαγόμενον τρίγωνον τὴν τῆς δ κ α. τὸ δὲ τῆς εἰρημένης συμπτώσεως σημεῖον ἔστω τὸ κ. ἔστω δὲ καὶ τὸ διὰ τοῦ β γραφόμενον ἡμικύκλιον τὸ β μ ζ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τοῦ β δ ζ α κύκλου ἔστω ἡ β ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὸ τοῦ β δ α ἡμικυκλίου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω. πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, διὰ τὸ ὀρθὸν ἑστάναι τὸν κύλινδρον. πιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ κ ι. καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ι ἐπὶ τὸ α ἐπιζευχθεῖσα συμβαλέτω τῇ β ζ κατὰ τὸ θ. ἡ δὲ α λ τῷ β μ ζ ἡμικυκλίῳ κατὰ τὸ μ. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ κ δ, μ ι, μ θ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν δ κ α, β μ ζ ἡμικυκλίων ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ μ θ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ. ὥστε καὶ πρὸς τὴν β ζ ὀρθή ἐστιν ἡ μ θ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θ β, θ ζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ α, θ ι, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ μ θ. ὅμοιον ἐστὶν ἄρα τὸ α μ ι τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν μ ι θ, μ α θ. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ι μ α. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δ κ α ὀρθή. παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ κ δ, μ ι. καὶ ἔσται ἀνάλογον ὡς ἡ δ α πρὸς α κ, τουτέστιν ἡ κ α πρὸς α ι, οὕτως ἡ ι α πρὸς α μ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. τέσσαρες ἄρα αἱ δ α, α κ, α ι, α μ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι. καί ἐστιν ἡ α μ ἴση τῇ γ, ἐπεὶ καὶ τῇ α β. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν α δ, γ, δύο μέσαι ἀνάλογον ηὕρηνται αἱ α κ, α ι.

ΩΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ.

Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ Ἐρατοσθένης χαίρειν.

Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν φασιν, εἰσαγαγεῖν τὸν Μίνω τῷ Γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ ὅτι πανταχοῦ ἑκατόμπεδος εἴη, εἰπεῖν, μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου, διπλάσιος ἔστω. τοῦ δὲ τοῦ κύβου μὴ σφαλεὶς, διπλασίαζον ἕκαστον κῶλον ἐν πάχει τάφου, ἐδόκει διημαρτηκέναι. τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθεισῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὲ καὶ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, τίνα ἄν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειεν. καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, κύβου διπλασιασμός. ὑποθέμενοι γὰρ κύβον, ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτος Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονός ἐστι διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτοῦ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν. μετὰ χρόνον δέ τινά φασιν Δηλίους ἐπιβαλλομένους νόσου κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι τινὰ τῶν βωμῶν ἐπιταχθέντας, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα. διαπεμψαμένους δὲ τοὺς παρὰ τῷ Πλάτωνι ἐν Ἀκαδημίᾳ γεωμέτρας, ἀξιοῦν αὐτοῖς εὑρεῖν τὸ ζητούμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοὺς, καὶ ζητούντων, δύο δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, Εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν. συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι. χειρουργῆσαι δὲ, καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι, πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τοῦ Μεναίχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δέ τις ὑφ' ἡμῶν ὀργανικὴ ῥᾳδία, δι' ἧς εὑρήσομεν, δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ' ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. τούτου δὲ εὑρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα. ὥστε καὶ βωμοὺς, καὶ ναοὺς δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα, καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν μέδιμνον εἰς κύβον καθιστάναι, καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα πόσον χωρεῖ. χρήσιμον δὲ ἔσται τὸ ἐπινόημα, καὶ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ καὶ λιθοβόλα ὄργανα.

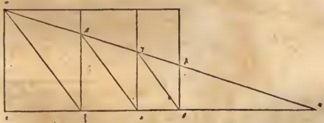


δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηθῆναι, καὶ τὰ πάχη καὶ τὰ μεγέθη, καὶ τὰς κατατρήσεις, καὶ τὰς χοινικίδας, καὶ τὰ ἐμβαλλόμενα νεῦρα, εἰ μέλλει καὶ ἡ βουλὴ ἀνάλογον ἐπαυξηθῆναι. ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γενέσθαι ἄνευ τῆς τῶν μέσων εὑρέ-

σεως.

πως. ἡ δὲ ἀπόδειξις καὶ τὴν κατασκευὴν τοῦ λεχθέντος ὀργάνου ὑπογέγραφα σοι. δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ αε, δθ. καὶ κείσθω ἐπί τινος εὐθείας τῆς εθ πρὸς ὀρθὰς ἡ αε. καὶ ἐπὶ τῆς εθ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς, τὰ αζ, ζι, ιθ. καὶ ἤχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς, αἱ αζ, λη, ιθ. ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι, μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ζι συνωσθήτω, τὸ μὲν αζ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ιθ ὑποκάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος, ἕως οὗ γένηται τὰ α β γ δ κατ' εὐθεῖαν. καὶ διήχθω διὰ τῶν α, β, γ, δ σημείων εὐθεῖα. καὶ συμπιπτέτω τῇ εθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ κ. ἔσται δὴ ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, ζβ παραλλήλοις, ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ ακ πρὸς κβ, ἡ εκ πρὸς κζ, καὶ ἡ κζ πρὸς κη. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βκ πρὸς κγ, ἐν μὲν ταῖς βζ, γη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ἐν δὲ ταῖς βη, γθ παραλλήλοις ἡ ηκ πρὸς κθ. ὡς ἄρα ἡ βκ πρὸς κγ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ' ὡς ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ εκ πρὸς κζ. καὶ ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ' ὡς ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ αε πρὸς βζ. ὡς δὲ ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ βζ πρὸς γη. ὡς δὲ ἡ ηκ πρὸς κθ, ἡ γη πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς βζ, ἡ βζ πρὸς γη, καὶ ἡ γη πρὸς δθ. ηὕρηνται ἄρα τῶν αε, δθ δύο μέσαι, ἥ τε βζ καὶ ἡ γη.

Ταῦτα οὖν ἐπὶ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδέδεικται. ἵνα δὲ καὶ ὀργανικῶς δυνώμεθα τὰς δύο μέσας λαμβάνειν, διαπήγνυται πλινθίον ξύλινον, ἢ ἐλεφάντινον, ἢ χαλκοῦν ἔχον τρεῖς πινακίσκους ἴσους ὡς λεπτοτάτους. ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσται, οἱ δὲ δύο ἐπωστοί εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσι καὶ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσι. τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται. πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέστερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένῃ πάντα καὶ ἄσχαστα, καὶ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις. ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι, τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἐστι, καὶ καθήρμοσται ὑπ' αὐτὴν τὴν στεφάνην τῆς στήλης προσμεμολυβδοχημένον, ὑπ' αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη καὶ τὸ σχῆμα, μετ' αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα. ὑπογεγράφθω οὖν σοι καὶ ταῦτα, ἵνα ἔχεις καὶ ὡς ἐν τῷ ἀναθήματι. τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ στήλῃ.

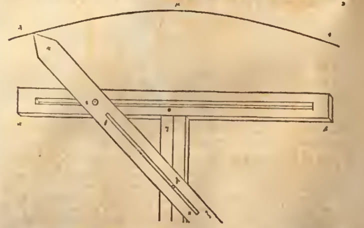


Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. δεδόσθωσαν αἱ αε, δθ. συνάγω δὴ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ' εὐθεῖαν γένηται τὰ α, β, γ, δ σημεῖα. νοείσθω δὴ ὡς ἔχει ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, βζ παραλλήλοις ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη, ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ κζ πρὸς κη. ὡς δὲ αὗται πρὸς ἀλλήλας, ἥ τε αε πρὸς βζ, καὶ ἡ βζ πρὸς γη. ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἡ ζβ πρὸς γη, ἡ γη πρὸς δθ. ἀνάλογον ἄρα αἱ αε, βζ, γη, δθ. ηὕρηνται ἄρα δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσαι. ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσι ταῖς αε, δθ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς αε, δθ, τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας, καὶ ἐπανοίσομεν ἐπ' ἐκείνας, καὶ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν. ἐὰν δὲ πλείους μέσας ἐπιταχθῇ εὑρεῖν, ἀεὶ ἑνὶ πλείους πινακίσκους καταστησόμεθα ἐν τῷ ὀργάνῳ τῶν ληφθησομένων μέσων, ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

Εἰ κύβου ἐξ ὀλίγου διπλάσιον ὦγαθὲ τεύχειν
Φράζεαι, τὴν στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν.
Εὖ μεταμορφῶσαι, τό δέ τοι πάρα κἂν σύγε μάνδρην
Ἢ † σῆρον, ἢ κοίλου φρέατος εὐρὺ κύτος. † σειρὸν
Τᾷδ' ἀναμετρήσαιο μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
Συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλῃς κανόνων.
Μὴ δὲ σύγ' ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων,
Μὴ δὲ μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
Δίζηαι. μὴ δ' εἴ τι θεοῦ δέος εὐδόξοιο,
Καμπύλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
Τοῖσδε γὰρ ἐν πινάκεσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις,
Ῥεῖα κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
Εὐαίων πτολεμαῖε πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
Πάνθ' ὅσα καὶ μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα.
Αὐτὸς ἐδωρήσω τόδ' ἐς ὕστερον οὐράνιε ζεῦ.
Καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
Καὶ τὰ μὲν ὡς τελέοιτο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
Τοῦ κυρηναίου τοῦτ' ἐρατοσθένεος.

ΩΣ ΝΙΚΟΜΗΔΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΚΟΓχοειδῶν γραμμῶν.

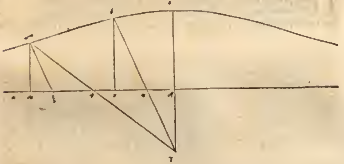
Γράφει δὲ καὶ νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ πρὸς αὐτοῦ περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἐκπληροῦντος. ἐφ' ὃ καὶ μεγάλα μὲν σεμνυνόμενος φαίνεται ὁ ἀνήρ, πολλὰ δὲ τοῖς ἐρατοσθένους ἐπιγελῶν εὑρήμασιν, ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις, ἔτι τε καὶ ἐλλείπουσι. τῶν τοίνυν περὶ τὸ πρόβλημα πεπονηκότων ἕν τι πρὸς ἐρατοσθένην συγκρίσεως ἕνεκα, καὶ αὐτὸν τοῖς ἤδη γεγραμμένοις, συνάπτομεν δυνάμει γράφοντα οὕτως. Νοεῖν χρὴ κανόνας δύο πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις συμβεβλημένους οὕτως



ὥς τε μίαν ἀποσώζειν αὐτοὺς ἐπιφάνειαν. καθάπερ εἰσὶν οἱ αβ, γδ. ἐν δὲ τῷ αβ σωλῆνα πελεκινοειδῆ, εἰς ὃν χελώνιον διατρέχειν δύναιτο. ἐν δὲ τῷ γδ ἐπὶ τὸ μέρος τὸ πρὸς τὸ δ, καὶ μέσην τὴν διαιροῦσαν εὐθεῖαν τὸ πλάτος αὐτοῦ κυλίνδριον συμφυὲς τῷ κανόνι, καὶ βραχὺ ὑπερέχον

ὑπερέχον τῆς ἄνωθεν ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ κανόνος. ἄλλον δὲ κανόνα ὡς τὸν ε ζ μετά βραχύ τι διάστημα τοῦ πρὸς τὸ ζ πέρατος ἀνατετμημένην ἔχοντα, ὡς τὴν η θ, δυναμένην περιβαίνειν τὸ πρὸς τῷ δ κυλινδρίον. πρὸς δὲ τῷ ε ὀπὴν στρογγύλην, ἥ τις ἐγκλείσεται εἰς τὸν ἀξόνιον, συμφυὲς τῷ διατρέχοντι χελωναρίῳ ἐν τῷ πελεκινοειδεῖ σωλῆνι, τῷ ὄντι ἐν τῷ α β κανόνι. ἐναρμοσθέντος τοίνυν τοῦ ε ζ κανόνος, κατὰ μὲν τὴν η θ ἀνατομὴν, ἐν τῷ πρὸς τὸ ζ κυλινδρίῳ, κατὰ δὲ τὴν ε ὀπὴν ἐν τῷ ἀξονίῳ τῷ συμφυεῖ τῷ χελωναρίῳ, ἐάν τις ἐπιλαβόμενος τοῦ κ ἄκρου τοῦ κανόνος κινῇ αὐτὸν ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ α μέρη, ἔπειτα πρὸς τὸ β, τὸ μὲν ε σημεῖον ἀεὶ ἐπὶ τοῦ α β κανόνος ἐνεχθήσεται. ἡ δὲ η θ ἀνατομὴ ἐπὶ τῷ πρὸς τὸ δ κυλινδρίῳ κινηθήσεται, ἀεὶ τῆς μέσης τοῦ ε ζ κανόνος εὐθείας ἐν τῇ κινήσει διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ πρὸς τῷ δ κυλίνδρου νοουμένης. τῆς δὲ ε κ ὑπεροχῆς τοῦ κανόνος ἀεὶ τῆς αὐτῆς μενούσης. ἐὰν τοίνυν πρὸς τὸ κ ἐπινοήσωμεν τι γραφεῖον ἐφαπτόμενον τοῦ ἐδάφους, γραφήσεταί τις γραμμὴ, οἵα ἐστὶν ἡ α μ ν, ἥν τινα καλεῖ Νικομήδης κοχλοειδῆ πρώτην γραμμὴν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ ε κ μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ δ.

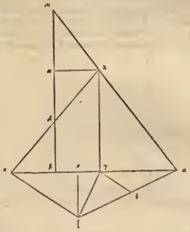
Ταύτῃ δὴ τῇ γραμμῇ συμβαῖνον δείκνυσι τὸ ἀεὶ ἐπ' ἔλαττον μὲν συμπορεύεσθαι τῷ α β κανόνι. καὶ ἐάν τις εὐθεῖα διαχθῇ μεταξὺ τῆς τε γραμμῆς καὶ τοῦ α β κανόνος, ὅτι πάντως τέμνει τὴν γραμμήν, καὶ τὸ μὲν πρότερον τῶν συμβαινόντων ἐστὶν εὐκατανόητον, ἐφ' ἑτέρας καταγραφῆς, κανόνος τε νοουμένου τοῦ α β. πόλου δὲ τοῦ γ, διαστήματος δὲ τοῦ δ ε, γραμμῆς δὲ κοχλοειδοῦς τῆς ζ ε η. προσπεπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ γ δύο αἱ γ θ, γ ζ ἴσων, δῆλον ὅτι γινομένων τῶν



κ θ, λ ζ. λέγω ὅτι ἡ ζ μ κάθετος ἐλάττων τῆς θ ν καθέτου. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς ὑπὸ μ λ γ γωνίας τῆς ὑπὸ ν κ γ, λοιπὴ ἡ λοιπῇ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ μ λ ζ λοιπῆς τῆς ὑπὸ ν κ θ ἐστὶν ἐλάσσων, καὶ διὰ τοῦτο ὀρθῶν οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς μ, ν, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τὸ ζ τῆς πρὸς τῷ θ. καὶ ἐὰν τῇ πρὸς τὸ θ ἴσην συστησώμεθα τὴν ὑπὸ μ ζ ξ, ἡ κ θ, τουτέστιν ἡ λ ζ πρὸς θ ν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἡ ξ ζ πρὸς ζ μ. ὥστε ἡ ζ λ πρὸς τὴν θ ν ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ζ μ. καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἡ θ ν τῆς ζ μ.

Τὸ δὲ δεύτερον ἦν τὸ τὴν διαγομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε α β καὶ τῆς γραμμῆς τέμνειν τὴν γραμμήν, καὶ τοῦτο δὲ οὕτω γίνεται γνώριμον. ἡ γὰρ διαγομένη, ἤτοι παράλληλός ἐστι τῷ α β ἢ οὔ. ἔστω πρότερον παράλληλος ὡς ἡ ζ η θ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἡ δ ε πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν κ. καὶ κέντρῳ τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ κ περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ζ η κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἡ λ ζ πρὸς ζ γ. ἀλλ' ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἦν ἡ δ ε πρὸς τὴν κ, τουτέστι τὴν γ ζ. ἴση ἄρα ἡ δ ε τῇ λ ζ ἀδύνατον. δεῖ γὰρ εἶναι τὸ ζ πρὸς τῇ γραμμῇ. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ διαγομένη παράλληλος.

καὶ ἡ μα πρὸς τὴν αλ. ἐπεὶ ἡ βγ τέτμηται δίχα τῷ ε. καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ κγ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εκ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τῶν ἀπὸ γε ζ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ γζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ κε ζ, τουτέστι τῷ ἀπὸ κζ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ μα πρὸς αβ, ἡ μλ πρὸς λκ. ὡς δὲ ἡ μλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ μα πρὸς αβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ἔστι τῆς μὲν αβ ἡμίσεια ἡ αδ, τῆς δὲ βγ διπλῆ ἡ γκ. ἐπεὶ καὶ ἡ λγ τῆς αδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ μα πρὸς αδ, οὕτως ἡ ηγ πρὸς γκ. ἀλλ' ὡς ἡ ηγ πρὸς γκ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θκ, διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ηζ, γθ. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ μδ πρὸς δα, ἡ ζκ πρὸς κθ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ αδ τῇ θκ, ἐπεὶ καὶ τῇ γζ ἴση ἐστὶν ἡ αδ. ἴση ἄρα καὶ ἡ μδ τῇ ζκ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ μδ, τῷ ἀπὸ ζκ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ μδ, ἴσον τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ δα. τῷ δὲ ἀπὸ ζκ, ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ.



ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ λδ, τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ, ὧν τὸ ἀπὸ αδ ἴσον τῷ ἀπὸ γζ. ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ αδ τῇ γζ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ βμα τῷ ὑπὸ βκγ, ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βκ, ἡ κγ πρὸς αμ. ἀλλ' ὡς ἡ βμ πρὸς βκ, ἡ γλ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γλ πρὸς γκ, οὕτως ἡ γκ πρὸς αμ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς αλ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ γκ πρὸς αμ, καὶ ἡ αμ πρὸς αλ.

ΕΙΣ ΤΟ Β. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Καὶ συνθέντι, ὡς ἡ δθ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε. τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς γὰρ ἐπὶ αὐτῶν τῶν ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ γβα, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ βε, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς αβ, ἡ βα πρὸς αε, καὶ ἡ γβ πρὸς βε. ὥς τε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως ἡ γα πρὸς αε. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αε, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δείκνυται, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς γε, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ βε. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἐστὶ πάλιν, ὡς ἡ μὲν αγ πρὸς γβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γε. τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. καὶ ὡς ἄρα ἡ αγ πρὸς γε, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. εἶτα ἐφεξῆς δεικνύναι πειρώμενος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας, ἴσον τὸν βκζ κῶνον. ἐκθέμενος κῶνον τὸν ν, βάσιν μὲν ἔχοντα ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. φησὶν ὅτι ὁ ν κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ζαβθ στερεῷ τομεῖ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἴστεον δὲ ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ οὐ τὸν τοιοῦτον τομέα ἀπεδείκνυεν ἴσον ὄντα τῷ οὕτως λαμβανομένῳ, ἀλλὰ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐλάττονος ἡμισφαιρίου, ὅν τινα καὶ κυρίως ἐν τοῖς ὅροις τομέα στερεὸν καλεῖν ἐφαίνετο. ἔφασκεν γάρ, τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνει τὴν κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς κώνου ἐπιφανείας τῆς ἐντὸς τοῦ κώνου. τὸ δὲ νῦν προκείμενον σχῆμα περιέχεται μὲν ὑπὸ κωνικῆς ἐπιφανείας, τὴν κορυφὴν ἐχούσης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης τοῦ κώνου. ὅτι δὲ οὖν τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἴσον γίνεται τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ

 ἐπιφα

τὸ ὑπὸ αε γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ κδ πρὸς τὸ ὑπὸ θδ, ὡς τὸ ἀπὸ αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ κθ δ πρὸς τὸ ὑπὸ θδ, κοινοῦ ὕψους τῆς θδ λαμβανομένης. ὡς δὲ ἡ αε πρὸς εγ, οὕτως τὸ ὑπὸ αε γ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, κοινοῦ πάλιν ὕψους λαμβανομένης τῆς εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ κθ δ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αε γ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ἀπὸ θδ πρὸς τὸ ἀπὸ δκ, οὕτως τὸ εγ πρὸς τὸ ἀπὸ γα. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ κθ δ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αε γ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ. καὶ ἀνάπαλιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Ως δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γβ. ὡς γὰρ ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ αδβ κάθετος ἦκται, καὶ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἡ δγ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ βγ πρὸς δγ, ἡ βδ πρὸς δα. καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν ἄρα. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, οὕτως ἡ πρώτη ἡ βγ πρὸς τρίτην τὴν γα. καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. δοθεὶς δὲ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ ἡ σφαῖρα ὑπόκειται δεδομένη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς ἡ δγ. καὶ δέδοται ὁ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ. ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, δέδοται ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ὥστε δοθεῖσά ἐστιν ἡ αγ, καὶ δοθὲν τὸ α. ἐπὶ γὰρ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστι θέσει δεδομένων γραμμῶν, δέδοται, ἄρα καὶ τὸ γ.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Και διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ κβ πρὸς βρ, καὶ ἡ δχ πρὸς χβ. ἐν γὰρ τῷ πρὸ τούτου συνήγετο οὕτως. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ κδ, δχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς βχ. ἐναλλάξ, ὡς ἡ κδ, τουτέστιν ἡ κβ πρὸς βρ, ἡ δχ πρὸς χβ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λχ πρὸς χδ, οὕτως συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς χβ. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ δχ πρὸς χβ, ἡ κβ πρὸς βρ. ὡς ἄρα ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρλ πρὸς ὅλην κλ, ἐστὶν ὡς ἡ κλ πρὸς λδ. ὡς γὰρ ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ρλ πρὸς λκ, ἡ κλ πρὸς λδ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ ρλ πρὸς τὸ ἀπὸ λκ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἀνάλογον γάρ εἰσιν, ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται, δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ χδ πρὸς χβ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς βχ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ἐκτὸς ἄρα τοῦ ρ πίπτει τὸ ζ.

Ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ πρὸς λχ, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κβ, βχ, πρὸς βχ, τουτέστιν ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἀναστρέψαντι ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ βζ πρὸς ζχ, ἡ λδ πρὸς λχ. δέδοται δὲ ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος. ἐπειδὴ ἡ μὲν ζβ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς δεδομένης σφαίρας. ἡ δὲ βχ τῶν βχ πέρατων αὐτῆς δεδομένων, καθ᾽ ὑπόθεσιν τετμημένης τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ διὰ τῆς αγ ἐπιπέδου. καὶ τῆς δβ πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῇ αγ δέδοται. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὅλη ἡ χζ καὶ ὁ τῆς χζ πρὸς ζβ. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς χδ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπειδὴ δέδοται ὁ λόγος τῶν τμημάτων, καὶ ὁ τοῦ λαγ κώνου πρὸς αργ κῶνον λόγος ἐστὶ δοθείς, ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς χρ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη, καὶ ὅλης ἄρα τῆς ρλ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρας τῶν ρλ, λδ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. τὰ γὰρ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ λδ πρὸς λχ. Ὅτι μὲν ἡ σύνθεσις τῶν λόγων λαμβάνεται τῆς λδ μέσης λαμβανομένης, ὡς κἂν τῇ στοιχειώσει ἐλαμβάνετο φανερόν. Περὶ συνθέσεως λόγων. ἐπεὶ δὲ τὸ λεγόμενον ἀδιαρθρώτως, καὶ οὐχ οὕτως ὥστε τὴν ἔννοιαν ἀναπληρῶσαι λέλεκται,

κται, ὡς ἔστιν εὑρεῖν ἐντυγχάνοντας Πάππῳ τε καὶ Θέωνι καὶ Ἀρπαδίῳ, ἐν πολλοῖς συντάγμασιν οὐκ ἀποδεικτικῶς, ἀλλ᾽ ἐπαγωγῇ τὸ λεγόμενον παριστᾶσιν, οὐ δεινὰ τόπον πρὸς βραχὺ διατρίψαντας τῷ λόγῳ, τὸ σαφέστερον παραστῆσαι. φημὶ τοίνυν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν μέσος τις ὅρος ληφθῇ, ὁ τῶν ἐξ ἀρχῆς ληφθέντων ἀριθμῶν λόγος, σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν τρίτον, ὑπομνηστέον δὲ πρότερον πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι. ὡς γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ᾽ ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δῆλον ὅτι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμος ἐστὶν ὁ δεδομένος λόγος, ὡς φασὶν ἄλλοι τε καὶ Νικόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ τῶν περὶ μουσικῆς, καὶ Ἡρώνας ἐν τῷ ὑπομνήματι τῷ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν. τουτέστι δὲ εἰπεῖν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου, καὶ ποιοῦντος τὸν ἡγούμενον. καὶ κυριώτερον μὲν ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων ἡ πηλικότης ἂν λαμβάνοιτο, ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιμορίων, ἢ ἐπιμερῶν, οὐκ ἔτι τὴν πηλικότητα δυνατὸν λαμβάνεσθαι, ἀδιαιρέτου μενούσης τῆς μονάδος, ὥστ᾽ ἐπ᾽ ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα. εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ, ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυγχάνει. διαιρεῖται δὲ ἡ μονὰς κατὰ τὸ μόριον, ἢ τὰ μόρια ἀφ᾽ ὧν ὀνόμασται ὁ λόγος, ὥστε εἰ ἦν ὡς ἐν σαφεστέρῳ τῷ λέγειν, τοῦ μὲν ἡμιολίου λόγου πηλικότητα πρὸς τῇ μονάδι, καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος. τοῦ δὲ ἐπιτρίτου πρὸς τῇ μονάδι τὸ τρίτον, ὥστε καθὰ καὶ ἀνωτέρω εἴρηται τὴν πηλικότητα τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον, πολλαπλασιαζομένην ποιεῖν τὸν ἡγούμενον. τοῦ γὰρ ἐν τῷ ϛ πρὸς τὰ δ ἡμιολίου πηλικότης, ἥ ἐστι μονὰς καὶ τὸ ἥμισυ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν δ ποιεῖ τὸν ϛ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δὲ τὸ αὐτὸ ἔξεστι κατανοεῖν. τούτων δὲ προσαφηνισθέντων ἐπαναπτέον ἐπὶ τὸ προτεθέν. Ἔστωσαν γὰρ οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ α, β. μέσος δὲ αὐτῶν εἰλήφθω τις ὁ γ. δεικτέον δή, ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β. εἰλήφθω γὰρ τοῦ μὲν α γ λόγου πηλικότης ὁ δ, τοῦ δὲ γ β ὁ ε. ὁ ἄρα ε τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ ζ πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου, τουτέστιν ὅτι ὁ ζ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ γὰρ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ β τὸν μὲν ζ πολλαπλασιάσας τὸν η πεποίηκεν, τὸν δὲ ε πολλαπλασιάσας τὸν γ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ὁ η πρὸς τὸν γ. πάλιν ἐπεὶ ὁ δ τὸν μὲν ε πολλαπλασιάσας τὸν ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ γ πολλαπλασιάσας τὸν α πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν γ, ὁ ζ πρὸς τὸν α. ἐναλλὰξ, ὡς ὁ ε πρὸς τὸν ζ, ὁ γ πρὸς τὸν α. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν γ. ἀλλ᾽ ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ἐδείχθη ὁ η πρὸς τὸν γ. καὶ ὡς ἄρα η πρὸς τὸν γ, ὁ α πρὸς τὸν γ. ἴσος ἄρα ὁ α τῷ η. ἀλλ᾽ ὁ β



τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκεν, καὶ ὁ β ἄρα τὸν ζ πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ ζ ἄρα πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου, καὶ ἔστιν ὁ ζ τοῦ δ ἐπὶ τὸν ε πολλαπλασιασθέντος, τουτέστι τῆς πηλικότητος τοῦ α γ λόγου ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ γ β λόγου. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὸν γένηται τὸ εἰρημένον, παρεμπιπτέτω τοῦ ιβ, καὶ τοῦ β, μέσος τις ἀριθμὸς ὁ δ, λέγω ὁ τοῦ ιβ πρὸς τὸν β λόγος, τουτέστιν ὁ ἑξαπλάσιος, σύγκειται ἐκ τε τοῦ τριπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὰ δ, καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ δ πρὸς τὰ β. ἐὰν γὰρ τὰς πηλικότητας τῶν λόγων πολλαπλασιάσωμεν ἐπ᾽ ἀλλήλας, τουτέστι τὸν γ ἐπὶ τὸν β, γίνεται ὁ ϛ πηλικότης ὢν τοῦ ιβ πρὸς τὰ β λόγου. καὶ ἐστὶν ἑξαπλάσιος, ὅπερ καὶ προέκειτο ὑποδεῖξαι. εἰ δὲ καὶ ὁ μέσος παρεμπίπτων μὴ ὑπάρχῃ τοῦ μὲν μείζονος ἐλάττων, τοῦ δὲ ἐλάττονος μείζων, ἀλλ᾽ ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ ἀμφοτέρων μείζων, ἢ ἀμφοτέρων ἐλάττων. καὶ οὕτως ἡ συνθέσις, ἡ προειρημένη ἀκολουθήσει, τοῦ θ καὶ τοῦ ϛ μέσος τις παρεμπιπτέτω ἀμφοτέρων μείζων ὁ ιβ. λέγω ὅτι ἐκ τε τοῦ ὑπεπιτρίτου τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου,

καὶ τοῦ

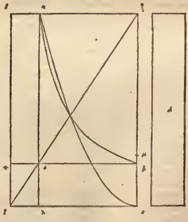
καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὸν ϛ, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος τοῦ θ πρὸς τὸν ϛ. ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα, τουτέστιν ἥμισυ καὶ τέταρτον. ἡ δὲ πηλικότης τοῦ ιβ πρὸς τὸν ϛ ἐστὶν ὁ β. ἐὰν οὖν πολλαπλασιάσωμεν τὸν β ἐπὶ τὸ ἥμισυ καὶ τέταρτον, γίνεται μονὰς α καὶ ἥμισυ, ἥ τις πηλικότης ἐστὶ τοῦ ἡμιολίου λόγου, ὃν ἔχει καὶ ὁ θ πρὸς τὸν ϛ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν τοῦ θ καὶ τοῦ ϛ μέσος ἐμπέσῃ ὁ δ, ἐκ τοῦ θ πρὸς δ διπλασιεπιτετάρτου, καὶ τοῦ δ πρὸς ϛ ὑφημιολίου, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος λόγος. πάλιν γὰρ τὴν πηλικότητα τοῦ διπλασιεπιτετάρτου, τὰ β δ ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ὑφημιολίου, τουτέστι τὰ δύο τρίτα, πολλαπλασιάσαντες ἕξομεν τὸ α ἥμισυ, πηλικότητα τοῦ ἡμιολίου ὡς εἴρηται λόγου, καὶ ἐπὶ πάντων ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἁρμόσει λόγος. συμφανὲς δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς ἐὰν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν, κἂν μὴ εἷς μέσος, πλείους δὲ παρεμπίπτωσιν ὅροι, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ πάντων τῶν λόγων, ὧν ἔχουσιν οἱ κατὰ τὸ ἑξῆς κείμενοι, ἀρχόμενοι ἀπὸ πρώτου, καὶ λήγοντες εἰς τὸν ἔσχατον τῇ ἐν τοῖς ἐχομένοις τάξει. δύο γὰρ ὅρων τῶν α, β παρεμπεπτώκασιν πλείους ἑνὸς οἱ γ, δ. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται. ὁ δὲ τοῦ α πρὸς τὸν δ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, συνῆπται ἐκ τῶν ὧν ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δειχθήσεται.



Ἔτι ἐν τῷ ῥητῷ φησίν, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, ἐδείχθη τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ δλ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐδείχθη γάρ, ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ, διὰ τῆς συνθέσεως. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. τὸ θ σημεῖον ὅπως ποτὲ μὲν ἐὰν τεθῇ ὅσον πρὸς τὴν ἀκολουθίαν τῆς ἀποδείξεως, κατ' οὐδὲν ἐμποδὼν γίνεται τῷ λόγῳ. ὅτι δὲ καθὰ ἐν τῇ καταγραφῇ κεῖται ἀεὶ μεταξὺ τῶν β, ζ πίπτει, οὕτω δηλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ λκ πρὸς δκ, τουτέστι πρὸς κβ, οὕτως ἡ κρ πρὸς ρβ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἡ λρ πρὸς ρκ, ἡ κρ πρὸς ρβ. μείζονα δὲ λόγον ἔχει ἡ λρ πρὸς ρχ, ἤπερ ἡ λρ πρὸς ρκ. καὶ ἡ λρ ἄρα πρὸς ρχ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κρ πρὸς βρ, τουτέστιν ἡ ζβ πρὸς ζρ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως τὴν βζ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ζρ. φανερὸν δὲ αὐτόθεν ὅτι ἡ ζθ τῆς θβ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ λδ τῆς δκ, καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ὥστε καὶ ἡ λδ τῆς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ λχ τῆς χρ μείζων ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ θζ τῆς θβ. λοιπὸν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ ζχ πρὸς ζθ. ἐπεὶ γὰρ τῆς βζ πρὸς θζ λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τῆς βζ πρὸς ζχ. ὁ αὐτὸς δὲ τῆς βζ πρὸς ζθ ἐστί, καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ λόγου. καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς χζ πρὸς ζθ. ἐὰν οὖν τὸν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς λόγοις κοινὸν ἀφέλωμεν τὸν τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ὁ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς ἀπὸ δχ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς χζ πρὸς ζθ. καὶ δεῖ δοθεῖσαν τὴν δζ τέμνειν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν, τουτέστι τὴν ζθ, οὕτως τὸ δοθέν, τουτέστι τὸ ἀπὸ βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τοῦτο δὲ οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ, καὶ τοῦ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν, καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεται, καὶ συντεθήσεται. ἐπὶ τέλει μὲν τὸ προ-

ἐν ᾧ ἐπηγγείλατο δεῖξαι, ἐν οὐδενὶ δὲ τῶν ἀντιγράφων εὑρεῖν. ὅθεν καὶ Διονυσόδωρον μὲν εὑρίσκομεν μὴ τῶν αὐτῶν ἐπιτυχόντα, ἀδυνατήσαντα δὲ ἐπιβαλεῖν τῷ καταλειφθέντι λήμματι, ἐφ᾽ ἑτέραν ὁδὸν τοῦ ὅλου προβλήματος ἐλθεῖν, ἥν τινα ἑξῆς γράψομεν. Διοκλῆς μέντοι καὶ αὐτὸς ἐν τῷ περὶ πυρίων αὐτῷ συγγεγραμμένῳ βιβλίῳ, ἐπηγγέλθαι νομίζων τὸν Ἀρχιμήδην, μὴ πεποιηκέναι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, αὐτὸς ἀναπληροῦν ἐπεχείρησε. καὶ τὸ ἐπιχείρημα ἑξῆς γράψομεν. ἔστι γὰρ καὶ αὐτὸ οὐδεμίαν μὲν ἔχον πρὸς τὰ παραλελειμμένα λόγον. ὁμοίως δὲ τῷ Διονυσοδώρῳ δι᾽ ἑτέρας ἀποδείξεως κατασκευάζον τὸ πρόβλημα. ἐν τινὶ μέντοι παλαιῷ βιβλίῳ. οὐδὲ γὰρ τῆς εἰς πολλὰ ζητήσεως ἀπέστημεν, ἐντετύχαμεν θεωρήμασι γεγραμμένοις, οὐκ ὀλίγην τὴν ἐκ τῶν πταισμάτων ἔχουσιν ἀσάφειαν περί τε τὰς καταγραφὰς πολυτρόπως ἡμαρτημένοις. τῶν μέντοι ζητουμένων, εἶχον τὴν ὑπόστασιν, ἐν μέρει δὲ τὴν Ἀρχιμήδει φίλην δωρίδα γλῶσσαν ἀπέσωζον, καὶ τοῖς συνήθεσι τῷ ἀρχαίῳ τῶν πραγμάτων ὀνόμασιν ἐγέγραπτο. τῆς μὲν παραβολῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ὀνομαζομένης, τῆς δ᾽ ὑπερβολῆς ἀμβλυγωνίου κώνου τομῆς. ὡς ἐξ αὐτῶν διανοεῖσθαι, μὴ ἄρα καὶ αὐτὸς εἴη τὰ ἐν τῷ τέλει ἐπηγγελμένα γράφεσθαι. ὅθεν σπουδαιότερον ἐντυγχάνοντες, αὐτὸ μὲν τὸ ῥητὸν ὡς γέγραπται διὰ πλῆθος, ὡς εἴρηται τῶν πταισμάτων δυσχερὲς εὑρόντες, τὰς ἐννοίας κατὰ μικρὸν ἀποσυλήσαντες κοινοτέρᾳ καὶ σαφεστέρᾳ κατὰ τὸ δυνατὸν λέξει γράφομεν. καθόλου δὲ πρῶτον
† διορισμῶν τὸ θεώρημα γραφήσεται, ἵνα τὸ λεγόμενον ὑπ᾽ αὐτοῦ σαφηνισθῇ περὶ τῶν † διορισμένων. εἶτα καὶ τοῖς ἀναλελυμένοις ἐν τῷ προβλήματι προσαρμοσθήσεται.

Εὐθείας δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς αγ, καὶ χωρίου τοῦ δ, προκείσθω λαβεῖν ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον ὡς τὸ ε. ὥστε εἶναι ὡς τὴν αε πρὸς αγ, οὕτω τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. γεγονέτω, καὶ κείσθω ἡ αγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε διήχθω ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἡ γη, διὰ δὲ τοῦ β τῇ αγ παράλληλος ἡ ζηβ, συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν γε, γη. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ηθ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε ὁποτέρᾳ τῶν γθ, ηζ παράλληλος ἤχθω ἡ κελ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γημ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. ὡς δὲ ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηζ. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηζ, οὕτως τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γηζ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γηζ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ κζ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ δ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ γημ, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γημ, οὕτως ἡ γη πρὸς ημ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γη πρὸς ημ, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ γη πρὸς ημ, τῆς ηζ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ὑπὸ μηζ.

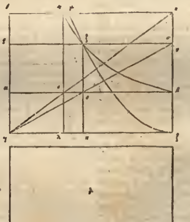


ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ὑπὸ μηζ, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ μηζ τῷ ἀπὸ ζκ. ἐὰν ἄρα περὶ ἄξονα τὴν ζη, γραφῇ διὰ τοῦ η παραβολή. ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ημ, ἥξει διὰ τοῦ κ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ δεδομένην εἶναι τὴν ημ τῷ μεγέθει, περιέχουσαν μετὰ τῆς ηγ δεδομένης δοθὲν τὸ δ. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης παραβολῆς. γεγράφθω οὖν, ὡς εἴρηται. καὶ ἔστω ὡς ἡ ηκ. πάλιν ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ θλ χωρίον

ἴσον

ἴσον ἐστὶ τῷ γβ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θκ λ τῷ ὑπὸ αβ κ. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θγ, γκ γραφῇ ὑπερβολή, ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ καὶ ἑκατέραν τῶν θγ, γκ, ἔτι μὴν καὶ τὸ β τῇ θέσει δεδόσθαι. γεγράφθω ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ κβ. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἅπτεται δὲ καὶ θέσει δεδομένης παραβολῆς. δέδοται ἄρα τὸ κ, καὶ ἔστιν ἀπ᾽ αὐτοῦ κάθετος ἡ κε, ἐπὶ θέσει δεδομένην τὴν αβ. δέδοται ἄρα τὸ ε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ εα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν αγ, οὕτως δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. δύο ἄρα στερεῶν ὧν βάσεις τὸ ἀπὸ εβ, καὶ τὸ δ. ὕψη δὲ αἱ εα, αγ, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε ἴσα ἐστὶ τὰ στερεά. τὸ ἄρα ἀπὸ εβ ἐπὶ τὴν εα, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι τῷ δ, ἐπὶ δοθεῖσαν τὴν γα. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς βα, ὅταν ᾖ διπλασία ἡ βε τῆς εα, ὡς δειχθήσεται. δεῖ ἄρα τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα.

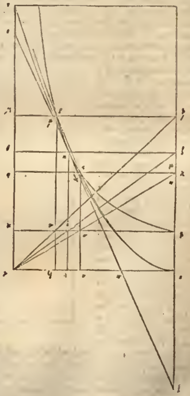
Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, ἄλλη δέ τις δοθεῖσα ἡ αγ, τὸ δὲ δοθὲν χωρίον τὸ δ. καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν αβ, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ἓν τμῆμα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν αγ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος. εἰλήφθω τῆς αβ τρίτον μέρος ἡ αε, τὸ ἄρα δ ἐπὶ τὴν αγ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα, ἢ ἴσον, ἢ ἔλασσον. εἰ μὲν οὖν μεῖζόν ἐστιν, οὐ συντεθήσεται, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. εἰ δὲ ἴσον ἐστί, τὸ ε σημεῖον ποιήσει τὸ πρόβλημα. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ δ ἐπὶ τὴν αγ, τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, συντεθήσεται οὕτως. κείσθω ἡ αγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, καὶ διὰ τοῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ γζ. διὰ δὲ τοῦ β τῇ αγ παράλληλος ἤχθω ἡ βζ, καὶ συμπιπτέτω τῇ γθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζθ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε τῇ ζη παράλληλος ἤχθω ἡ κελ. ἐπεὶ οὖν τὸ δ ἐπὶ τὴν αγ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τῆς εα, ἔστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ηκ. ἔστω οὖν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γζν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γζ πρὸς ζη. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζη, οὕτως τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζη. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζη, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζν, οὕτως τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζν, οὕτως ἡ γζ πρὸς ζν. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζν τῆς ζη κοινοῦ ὕψους



λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ὑπὸ νζη. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ὑπὸ νζη, οὕτως τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ημ τῷ ὑπὸ ηζν. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ ζ περὶ ἄξονα τὴν ζη γράψωμεν παραβολήν, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ζν, ἥξει διὰ τοῦ μ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ μξζ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ θλ τῷ αζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θκλ τῷ ὑπὸ αβζ, ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θγ, γζ γράψωμεν ὑπερβολήν, ἥ-

ξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ βκ, τέμνουσα τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ ξ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξοπ. καὶ διὰ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ ρξσ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βκζ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ δγ, γζ. καὶ παράλληλοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ρξπ, ταῖς αβζ. ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ρξπ τῷ ὑπὸ αβζ, ὥστε καὶ τὸ ρο τῷ οζ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ ο ἐπιζευχθῇ, ἥξει διὰ τοῦ σ. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γοσ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως ἡ ζβ πρὸς βσ, τουτέστιν ἡ γζ πρὸς ζσ. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζσ, τῆς ζν κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ὑπὸ σζν. καὶ ὡς ἄρα ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ὑπὸ σζν. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ γζν, τὸ δοθὲν χωρίον. τὸ δὲ ὑπὸ σζν, ἴσον τὸ ἀπὸ σξ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς βο, διὰ τὴν παραβολήν. ὡς ἄρα ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δοθὲν χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βο. εἴληπται ἄρα τὸ ο σημεῖον, ποιοῦν τὸ πρόβλημα.

Ὅτι διπλασίας οὔσης τῆς βε τῆς εα, τὸ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς βα, δειχθήσεται οὕτως. ἔστω γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει πάλιν δοθεῖσα εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, ἡ αγ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ διὰ τοῦ β παραλλήλῳ ἠγμένῃ τῇ αγ κατὰ τὸ ζ. καὶ διὰ τῶν γ ζ παράλληλοι τῇ αβ ἤχθωσαν αἱ θζ, γη. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ γα ἐπὶ τὸ θ. καὶ ταύτῃ παράλληλος διὰ τοῦ ε ἤχθω ἡ κελ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ ὑπὸ γημ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. τὸ ἄρα ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν αγ, διὰ τὸ δύο στερεῶν ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσι. λέγω οὖν, ὅτι τὸ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν αγ, μέγιστόν ἐστι πάντων ὁμοίως ἐπὶ τῆς βα λαμβανομένων. γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η περὶ ἄξονα τὴν ζη παραβολή. ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ημ. ἥξει δὴ διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. καὶ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ θγ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, διὰ τὸ ἕβδομον καὶ εἰκοστὸν θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ ν. καὶ διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς νγη, γεγράφθω ὑπερβολή. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει εἴρηται. ἐρχέσθω οὖν ὡς ἡ βκ. καὶ ἐκβληθείσῃ τῇ ζη ἴση κείσθω ἡ νξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξκ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ο. φανερὸν ἄρα ὅτι ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς



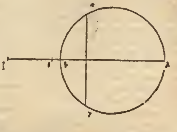
διὰ

διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ πέμπτου καὶ τριακοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν ἡ β ε τῆς ε α, οὕτως γὰρ ὑπόκειται, τουτέστιν ἡ ζ κ τῆς κ θ. καὶ ἔστιν ὅμοιον τὸ ο θ κ τρίγωνον τῷ ξ ζ κ τριγώνῳ. διπλασία ἐστὶ καὶ ἡ ξ κ τῆς κ ο. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ξ κ τῆς κ π διπλῆ, διὰ τὸ καὶ τὴν ξ ζ τῆς ξ κ. καὶ παράλληλον εἶναι τὴν π κ τῇ κ ζ. ἴση ἄρα ἡ ο κ τῇ κ π, ἡ ἄρα ο κ π ψαύουσα τῆς παραβολῆς, καὶ μεταξὺ οὖσα τῶν ἀσυμπτώτων δίχα τέμνεται. ἐφάπτεται ἄρα τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τρίτου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐφάπτεται δὲ καὶ τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ αὐτὸ κ. ἡ ἄρα παραβολὴ τῆς ὑπερβολῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ κ. νενοήσθω οὖν καὶ ἡ ὑπερβολὴ προσεκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὸ ρ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς α β τυχὸν σημεῖον τὸ c, καὶ διὰ τοῦ c τῇ κ λ παράλληλος ἤχθω ἡ τ c υ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ τ, καὶ διὰ τοῦ τ τῇ γ κ παράλληλος ἤχθω ἡ φ τ χ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴσον ἐστὶ τὸ φ υ τῷ γ β, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ γ c. ἴσον γὰρ τὸ φ ς τῷ δ c κ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ χ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἥξει διὰ τοῦ c. ἤχθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ c χ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ψ χ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ χ κ μ διὰ τὴν παραβολήν, τὸ ἀπὸ τ χ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ χ κ μ. γεγονέτω οὖν τῷ ἀπὸ τ χ ἴσον τὸ ὑπὸ χ κ ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ c α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ κ πρὸς κ χ. ἀλλ' ὡς ἡ γ κ πρὸς κ χ τῆς κ ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ κ ω πρὸς τὸ ὑπὸ χ κ ω. καὶ πρὸς τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἀπὸ χ τ, τουτέστι τὸ ἀπὸ β c ἐπὶ τὴν c α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ κ ω ἐπὶ τὴν γ α. τὸ δὲ ὑπὸ γ κ ω, ἐπὶ τὴν γ α ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ γ κ μ ἐπὶ τὴν γ α, τὸ ἄρα ἀπὸ β c ἐπὶ τῆς c α ἔλαττον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τῆς ε α. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ λαμβανομένων τῶν ε, β. ἀλλὰ δὴ εἰλήφθω μεταξὺ τῶν ε, α σημεῖον τὸ ς. λέγω ὅτι καὶ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α. τῶν γὰρ αὐτῶν κατεσκευασμένων ἤχθω διὰ τοῦ ς τῇ κ λ παράλληλος ἡ ψ ς ρ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ ρ. συμβαλεῖ γὰρ αὐτῇ διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τῇ ἀσυμπτώτῳ, καὶ διὰ τοῦ ρ παράλληλος ἀχθεῖσα τῇ α β ἡ α ρ β. συμβαλλέτω τῇ θ ζ ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν ὑπερβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ γ ψ καὶ τῷ α θ, ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἥξει διὰ τοῦ ς. ἤχθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ ς β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν παραβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α β τῷ ὑπὸ β θ μ, τὸ ἄρα ἀπὸ ρ β ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ β θ μ. γεγονέτω τὸ ἀπὸ ρ β ἴσον τῷ ὑπὸ β θ ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ς α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ κ πρὸς κ β. ἀλλ' ὡς ἡ γ κ πρὸς κ β τῆς γ ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ κ ω πρὸς τὸ ὑπὸ β κ ω. τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ρ β, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ β ς. τὸ ἄρα ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ κ ω ἐπὶ τὴν γ α. καὶ μεῖζον τὸ ὑπὸ γ θ μ τοῦ ὑπὸ γ θ ω. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, τοῦ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ τῶν ε, α λαμβανομένων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τοῦ ε, β λαμβανομένων. πάντων ἄρα τῶν ἐπὶ τῆς α β ὁμοίως λαμβανομένων, μέγιστον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α, ὅταν ἡ διπλασία ἡ β ε τῆς ε α.

Ἐπιστῆσαι δὲ χρὴ καὶ τοῖς ἀκολουθοῦσι κατὰ τὴν εἰρημένην καταγραφήν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ἀπὸ β c ἐπὶ τὴν c α, καὶ τὸ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α ἔλασσον τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τῆς ε α. δυνατόν ἐστι καὶ τοῦ δοθέντος χωρίου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἐλάσσονος ὄντος τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τῆς ε α κατὰ δύο σημεῖα τῆς α β τεμνομένην ποιεῖν τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα. τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν νοήσωμεν περὶ διάμετρον τὴν χ υ γραφομένην παραβολήν. ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν κ ω. ἡ γὰρ τοιαύτη παραβολὴ πάντως ἔρχεται διὰ τοῦ τ. καὶ ἐπειδὴ ἀνάγκη αὐτὴν συμπίπτειν τῇ γ υ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ, δῆλον ὅτι τέμνει τὴν ὑπερβολήν, καὶ κατ' ἄλλο σημεῖον ἀνωτέρω τοῦ κ, ὡς ἐνταῦθα κατὰ τὸ ρ. καὶ ἀπὸ τοῦ ρ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἀγομένη, ὡς ἐνταῦθα ἡ ρ ς τέμνει τὴν α β κατὰ τὸ ς. ὥστε τὸ ς σημεῖον ποιεῖν τὸ πρόβλημα, καὶ ἴσον γίνεσθαι τὸ ἀπὸ β c ἐπὶ τὴν c α, τῷ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α, ὡς ἐστὶ διὰ τῶν προειρημένων ἀποδείξεων ἐμφανές. ὥστε δυνατοῦ ὄντος ἐπὶ τῆς β α δύο σημεῖα λαμβάνειν, ποιοῦντα τὸ ζητούμενον, ἔξεστιν ὁπότερον τις βούλοιτο λαμβάνειν, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β. ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, α. εἰ μὲν γὰρ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β ὡς εἴρηται τῆς διὰ τῶν κ, τ σημείων γραφομένης παραβολῆς κατὰ δύο σημεῖα τεμνούσης τὴν ὑπερβολὴν τὸ μὲν ἐγγύτερον τοῦ κ, τουτέστι τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς εὑρήσει τὸ μεταξὺ τῶν ε, β, ὡς ἐνταῦθα τὸ τ εὑρίσκει τὸ c. τὸ δὲ ἀπωτέρω τὸ μεταξὺ τῶν ε, α ὡς ἐνταῦθα τὸ ρ εὑρίσκει τὸ ς.

Καθόλου μὲν οὖν οὕτως ἀναλέλυται καὶ συντίθεται τὸ πρόβλημα. ἵνα δὲ καὶ τοῖς ἀρχι-

μηδείοις ῥήμασιν ἐφαρμοσθῆ, νενοήσθω ὡς ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, διάμετρος μὲν τῆς σφαίρας ἡ δβ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ βζ, καὶ ἡ διδομένη ἡ ζθ. κατηντήσαμεν ἄρα φησὶν εἰς τὸ τὴν δζ τεμεῖν κατὰ τὸ χ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς τὴν δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δχ. τοῦτο δὲ ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. εἰ γὰρ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μεῖζον ἐτύγχανεν τοῦ ἀπὸ τῆς δβ ἐπὶ τὴν βζ, ἀδύνατον ἦν τὸ πρόβλημα ὡς δειχθήσεται. εἰ δὲ ἴσον τὸ β σημεῖον ἐποίει τὸ πρόβλημα, καὶ οὕτως δὲ οὐδὲν ἦν πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς ἀρχιμήδους πρόθεσιν. ἡ γὰρ σφαῖρα οὐκ ἐτέμνετο εἰς τὸν δοθέντα λόγον. ἁπλῶς γὰρ λεγόμενον ἔχειν πρὸς διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς ζβ, καὶ τοῦ μείζονα εἶναι τὴν βζ τῆς ζθ, οὐκ ἔχει διορισμόν. τὸ γὰρ ἀπὸ δβ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν ζθ τὴν δοθεῖσαν ἔλαττον ἐστὶ, τοῦ ἀπὸ τῆς δβ ἐπὶ τῇ βζ. διὰ τὸ τὴν βζ τῆς ζθ μείζονα εἶναι, οὗπερ ὑπάρχοντος ἐδείξαμεν δυνατόν, καὶ ὅπως περαίνεται τὸ πρόβλημα. κατανοεῖν δὲ χρὴ καὶ τοῖς ὑπ' ἀρχιμήδους λεγομένοις συμφώνως ἔχουσιν τοῖς ὑφ' ἡμῶν ἀναλελυμένοις. πρότερον μὲν γὰρ μετὰ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ καθόλου τὸ εἰς ὃ κατήντησεν λέγων, φησί. δοθεῖσαν τὴν δζ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ χζ πρὸς δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δχ. εἶτα εἰπὼν ὡς καθόλου μὲν τὸ λεγόμενον ἔχει διορισμόν.



προστεθέντων δὲ τῶν ὑπ' αὐτοῦ εὑρεθέντων προβλημάτων, τοῦ τε εἶναι διπλασίαν τὴν δβ τῆς βζ, καὶ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ. μὴ ἔχειν διορισμὸν μερικώτερον, ἐπαναλαμβάνει τὸ πρόβλημα. καὶ φησίν. ὅτι καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, οὐκέτι ὡς πρότερον τὴν δζ εἰπών, ἀλλὰ τὴν δβ δεῖν τεμεῖν διὰ τὸ ὡς ἀνωτέρω ἡμεῖς ἀπεδείξαμεν εἰδέναι αὐτόν, ὡς δύο σημεῖα ἐστὶ τὰ λαμβανόμενα ἐπὶ τῆς δζ, καὶ ποιοῦντα τὸ πρόβλημα, ὧν ἓν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β. ἕτερον δὲ τὸ μεταξὺ τῶν β, ζ. ὧν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β ἦν τὸ πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς πρόθεσιν χρήσιμον.

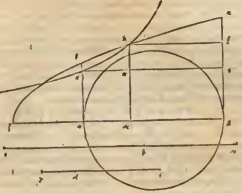
Ταῦτα μὲν οὖν ἀκόλουθα τοῖς ἀρχιμήδους ῥήμασι, κατὰ τὸ δυνατὸν σαφῶς ἀπεγράψαμεν. ἐπεὶ δὲ ὡς προείρηται καὶ διονυσόδωρος οὐδαμῶς τοῖς ἐπὶ τέλει γραφομένοις παρὰ ἀρχιμήδους ἐπηγγελμένοις ἐντυχών, ἀτονήσας δὲ ὥσπερ προσευρεῖν τὰ μὴ ἐκτεθέντα, ἐφ' ἑτέραν ὁδὸν βαδίζων τοῦ ὅλου προβλήματος, οὐκ ἄχαριν εὑρέσεως συνέγραψε τὸ πρᾶγμα ἀναγκαῖον, ᾠήθημεν δ' ἂν καὶ αὐτὸν τούτοις ὑποσυνάψαι διορθωσάμενοι κατὰ δύναμιν. καὶ γὰρ αὐτὸς ἐκ πολλῆς ἀμελετησίας τῶν ἀνθρώπων τὰ πολλὰ τῶν ἀποδείξεων τῷ πλήθει τῶν πταισμάτων ἠφανισμένην ἔχον ἐν πᾶσιν οἷς ἡμεῖς ἐντετύχαμεν ἀντιγράφοις ἐφέρετο.

ΩΣ ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΣ.

Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. δεῖ δὴ τεμεῖν τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὴν αβ, ὥστε τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ α, πρὸς τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. ἐκβεβλήσθω ἡ βα ἐπὶ τὸ ζ. καὶ κείσθω τῆς αβ ἡμίσεια ἡ αζ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γε πρὸς εδ, ἐχέτω ἡ ζα πρὸς αη, καὶ ἔστω ἡ αη πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ. καὶ τῶν ζα, αη μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ αθ. μείζων ἄρα ἡ αθ τῆς αη. καὶ περὶ ἄξονα τὴν ζβ διὰ τοῦ ζ γεγράφθω παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν αη. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ θ. ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ζαη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ αθ. γεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ζθκ. καὶ διὰ τοῦ β ἀνήχθω παρὰ

τὴν

τῇ α β ἡ β κ, καὶ τεμνέτω τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ κ, καὶ διὰ τοῦ θ. περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ζ β κ, γεγράφθω ὑπερβολή. τεμεῖ δὴ τὴν παραβολὴν μεταξὺ τῶν θ, κ, τεμνέτω κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἤχθω ἡ λ μ. καὶ διὰ τῶν κ, λ τῇ α β παράλ-



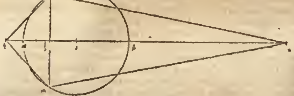
λοι ἤχθωσαν αἱ κ ν, λ ξ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ θ λ, ἀσύμπτωτοι δὲ α β κ, καὶ παράλληλοι ταῖς α κ ν, αἱ μ λ ξ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ κ ν τῷ ὑπὸ μ λ ξ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἀλλ' ἡ μὲν κ ν τῇ α β ἴση ἐστίν, ἡ δὲ λ ξ τῇ μ β, τὸ ἄρα ὑπὸ λ μ β ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ κ α β. καὶ διὰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον εἰσίν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λ μ πρὸς κ α, οὕτως ἡ α β πρὸς β μ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ἀπὸ κ α, οὕτως τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν παραβολὴν τὸ ἀπὸ λ μ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζ μ, α κ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ λ, ἡ μ λ πρὸς α κ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης. ὡς ἄρα ἡ ζ μ πρὸς α κ, οὕτως τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ἀπὸ κ α. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ἀπὸ α κ οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ, οὕτως ἡ ζ μ πρὸς α κ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ. καὶ ὡς ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, οὕτως ἡ ζ μ πρὸς α κ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν α κ, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ. ὧν γὰρ κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν ζ α, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν α κ, ἐστὶν ὡς ἡ ζ α πρὸς α κ, τουτέστιν ἡ γ ε πρὸς ε δ. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. καὶ ὁ κῶνος ὁ ἄρα βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν ζ α, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἐστὶν ὡς ἡ γ ε πρὸς ε δ. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν ζ α, ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ β, ὕψος δὲ ἡ β μ. ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸ εἰρημένον τμῆμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ γ ε πρὸς ε δ. καὶ διελόντι τὸ τμῆμα, οὗ κορυφὴ τὸ α, ὕψος δὲ ἡ α μ πρὸς τὸ

τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β, ὕψος δὲ ἡ β μ, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γ δ πρὸς δ ε. τὸ ἄρα διὰ τῆς λ μ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ὀρθὸν πρὸς τὴν α β, τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὅτι δὲ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ β, ὕψος δὲ ἡ β μ, δειχθήσεται οὕτως. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ α, οὕτως ἡ ο μ πρὸς μ β. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ τὴν ο μ, ἴσος ἐστὶ τμήματι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ α, οὕτως ἡ ο μ πρὸς μ β. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ ο, οὕτως ἡ α μ πρὸς μ β, ἀλλ᾽ ὡς ἡ α μ πρὸς μ β, οὕτως τὸ ἀπὸ π μ πρὸς τὸ ἀπὸ μ β. καὶ οὕτως ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ π μ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μ β. ὡς ἄρα ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ π μ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μ β, οὕτως ἡ μ ζ πρὸς μ ο. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μ β, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ π μ, ὕψος δὲ τὴν μ ο. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε καὶ τῷ τμήματι ἴσος ἐστί.

ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

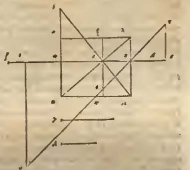
Γράφει δὲ καὶ ὁ Διοκλῆς ἐν τῷ περὶ πυρίων, περὶ λέγων τάδε. ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν τινὰ λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς τοῦ τμήματος κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετος πρὸς τὴν τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετον. οἷον ἐὰν ᾖ σφαῖρα ἡ α β γ, καὶ τμηθῇ ἐπιπέδῳ τινὶ τῷ περὶ διάμετρον τὴν γ δ κύκλῳ. καὶ διαμέτρου οὔσης τῆς α β, κέντρου δὲ τοῦ ε. ποιήσωμεν ὡς συναμφότερον τὴν ε α, α ζ πρὸς ζ α, οὕτως τὴν η ζ πρὸς ζ β. ἔτι δὲ ὡς συναμφότερον τὴν ε β, β ζ πρὸς ζ β, οὕτως τὴν θ ζ πρὸς ζ α, ἀποδέδεικται



ὅτι τὸ μὲν γ β δ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν γ δ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζ η. τὸ δὲ γ α δ τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ θ ζ. προτεθέντος οὖν αὐτῷ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα, κατασκευάσας τὰ εἰρημένα φησί. λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γ δ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζ θ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ζ η. καὶ γὰρ τοῦτο ἀποδέδεικται, οἱ κῶνοι οἱ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. λόγος ἄρα τῆς θ ζ πρὸς ζ η δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θ ζ πρὸς ζ α, οὕτως συναμφότερος ἡ ε β ζ πρὸς τὴν ζ β. διελόντι ὡς ἡ θ α πρὸς α ζ, οὕτως ἡ ε β πρὸς ζ β. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ὡς ἡ η β πρὸς ζ β, οὕτως ἡ αὐτὴ εὐθεῖα πρὸς τὴν ζ α. γίνεται οὖν πρόβλημα τοιοῦτον. θέσει οὔσης εὐθείας τῆς α β, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ δοθείσης τῆς ε β, τεμεῖν τὴν α β κατὰ τὸ ζ, καὶ προσθεῖναι τὰς θ α, β η, ὥστε λόγον εἶναι τῆς θ ζ πρὸς ζ η δοθέντα, ἔτι τε εἶναι ὡς μὲν τὴν θ α πρὸς α ζ, οὕτως τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ζ β. ὡς δὲ τὴν η β πρὸς β ζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν πρὸς ζ α. τοῦτο δὲ ἑξῆς δέδεικται. ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης μακρότερον αὐτὸ δείξας, καὶ οὕτως εἰς πρόβλημα ἕτερον ἀπάγει, ὃ οὐκ ἀποδείκνυσιν ἐν τοῖς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Θίσα

Θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς αβ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β. καὶ λόγου τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ, τεμεῖν τὴν αβ κατὰ τὸ ε, καὶ προσθεῖναι τὰς ζα, ηβ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ζε πρὸς τὴν εη. ἔτι δὲ εἶναι ὡς τὴν ζα πρὸς αε, οὕτως δοθεῖσάν τινα εὐθεῖαν πρὸς τὴν βε. ὡς δὲ τὴν ηβ πρὸς βε, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν εα. γεγονέτω, καὶ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ θακ, λβμ. καὶ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴση κείσθω ἑκατέρα τῶν ακ, βμ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ κε, με, ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ λ, θ. ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ κμ. διὰ τοῦ λ παράλληλος ἤχθω τῇ αβ ἡ λν. διὰ δὲ τοῦ ε τῇ νκ ἡ ξεοπ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ζα πρὸς αε, οὕτως ἡ μβ πρὸς βε. ὑπόκειται γάρ. ὡς δὲ ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς αε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση ἄρα ἡ ζα τῇ θα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ βη τῇ βλ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς λβε, καὶ συναμφοτέρου τῆς θαε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. κείσθω τῇ κα ἴση ἑκατέρα τῶν αρ, βς. ἐπεὶ οὖν συναμφότερος μὲν ἡ θαε ἴση ἐστὶ τῇ ζε, συναμφότερος δὲ ἡ λβε ἴση τῇ εη, συναμφότερος δὲ ἡ καε ἴση τῇ ρε, συναμφότερος δὲ ἡ μβε ἴση τῇ ςε. καὶ ἐδείχθη τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρες. διὰ δὲ τοῦτον τὸ ρ μεταξὺ τῶν α, ζ πίπτει, τὸ δὲ ς ἐξωτέρω τοῦ η πεσεῖται, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη. ὡς δὲ ἡ ζε πρὸς εη, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. τὸ δὲ ὑπὸ ζεη ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ρες, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ εη. κείσθω τῇ βε ἴση ἡ εο, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βο ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ ἀπὸ τῶν ς, ρ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ςτ, ρυ, συμβαλλέτωσαν αὐτῇ κατὰ τ, υ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου τοῦ β, πρὸς θέσει δεδομένην τὴν αβ, ἦκται ἡ τυ, δεδομένην ποιοῦσαν γωνίαν τὴν ὑπὸ εβο ἡμίσειαν ὀρθῆς, δέδοται ἡ τυ τῇ θέσει. καὶ ἀπὸ δεδομένων τῶν ς, ρ θέσει ἠγμέναι αἱ ςτ, ρυ τέμνουσιν αὐτὴν κατὰ τὰ τ, υ. δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ τ, υ. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ τυ τῇ θέσει, καὶ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν τῶν εοβ, ςτυ τριγώνων ὁμοιότητα ἐστὶν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ ςβ πρὸς βε. καὶ συνθέντι ἐστὶν, ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ ςε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ ςε πρὸς ερ. ἀλλ' ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως τὸ ὑπὸ του πρὸς τὸ ἀπὸ ου. ὡς δὲ ἡ ςε πρὸς ερ, οὕτως τὸ ὑπὸ ςερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ του πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ ςερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ του πρὸς τὸ ὑπὸ ςερ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. τὸ δὲ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον. ἐπειδὴ καὶ τὸ ἀπὸ οβ τοῦ ἀπὸ βε. καὶ τὸ ὑπὸ του ἄρα τοῦ ὑπὸ ςερ ἐστὶ διπλάσιον. τὸ δὲ ὑπὸ ςερ πρὸς τὸ ἀπὸ εη ἐδείχθη λόγον ἔχειν ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. καὶ τὸ ὑπὸ του ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ εη λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ. τὸ δὲ ἀπὸ εη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ξο, ἑκατέρα γὰρ τῶν εη, ξο ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ λβε. τὸ ἄρα ὑπὸ του πρὸς τὸ ἀπὸ ξο λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, καὶ δέδοται ὁ τῆς διπλασίας τῆς γ πρὸς τὴν δ λόγος. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ του πρὸς τὸ ἀπὸ ξο λόγος. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς τὴν δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως τὴν τυ πρὸς ἄλλην τινὰ ὡς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γράψωμεν ἔλλειψιν ὥστε τὰς κατηγμένας ἐν τῇ ὑπὸ ξοβ γίνεται, τουτέστιν ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν φ ἐλλείποντα ὅμοια τῷ ὑπὸ τυφ, ἥξει διὰ τοῦ ξ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ



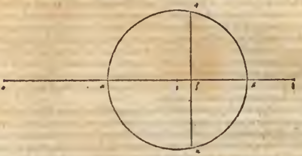
εἰκοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ υξ τ. τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. καὶ ἐπεὶ διαγώνιός ἐστιν ἡ κξ τοῦ νμ παραλληλογράμμου, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξ π τῷ ὑπὸ α β μ. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θκ μ γραφῇ ὑπερβολή, ἥξει διὰ τοῦ ξ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη διὰ τὸ καὶ τὸ β σημεῖον τῇ θέσει δεδόσθαι, καὶ ἑκατέραν τῶν αβ, βμ (καὶ διὰ τοῦτο τὰς θκ μ ἀσυμπτώτους) γεγράφθω. καὶ ἔστω ὡς ἡ ξβ, τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἅπτεται δὲ καὶ θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. δέδοται ἄρα τὸ ξ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ ξε. δέδοται ἄρα τὸ ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. καὶ δέδοται ἡ εα, δέδοται ἄρα καὶ ἡ αζ, διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δέδοται καὶ ἡ ηβ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ὡς γὰρ τῆς ἐπὶ αὐτῆς καταγραφῆς, ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἣν δεῖ τεμεῖν ἡ αβ. ἡ δὲ δοθεῖσα ἑτέρα ἡ ακ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἤχθω τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ βμ ἴση οὖσα τῇ ακ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κμ. καὶ τῇ μὲν κα ἴση κείσθω ἡ αρ, καὶ ἡ βc. ἀπὸ τῶν ρ, c πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ρυ, cτ. καὶ πρὸς τῷ β σημείῳ συνεστάτω ἡμίσεια ὀρθῆς ἡ ὑπὸ αβο, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ βο ἐφ' ἑκάτερα τεμνέτω τὰς cτ, ρυ κατὰ τὰ τ, υ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως ἡ τυ πρὸς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γεγράφθω ἔλλειψις, ὥστε τὰς καταγομένας ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρακείμενα περὶ τὴν φ, ἐλλείποντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τυ φ. διὰ δὲ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ακ, κμ γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ βξ, τέμνουσα τὴν ἔλλειψιν κατὰ τὸ ξ, καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ π. διὰ δὲ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ λξν, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ κα, μβ ἐπὶ τὰ λ, θ. καὶ ἡ με ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ κν κατὰ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βξ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θκ, κμ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξ π τῷ ὑπὸ αβ μ, διὰ τὸ ὀκτὼ θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ διὰ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ κελ. κείσθω οὖν τῇ μὲν θα ἴση ἡ αζ, τῇ δὲ λβ ἴση ἡ βη. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ φ πρὸς τὴν τυ. ὡς δὲ ἡ φ πρὸς τὴν τυ, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξ ο, διὰ τὸ κα θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξ ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ σβ πρὸς βε. καὶ συνθέντι ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ sε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ cε πρὸς ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ c ε ρ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ὑπὸ c ε ρ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον, διὰ τὸ καὶ τὸ ἀπὸ βο τοῦ ἀπὸ βε. ἴσον γάρ ἐστιν ἡ βε τῇ εο, ἡμισείας ὀρθῆς οὔσης ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς β, ο. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ c ε ρ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξ ο, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρ ε c πρὸς τὸ ἀπὸ ξ ο. ἴση δὲ ἡ ξο τῇ εν, διὰ τὸ ἑκατέραν αὐτῶν ἴσην εἶναι συναμφοτέρῳ τῇ λβε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. ἀλλὰ συναμφοτέρῳ μὲν τῇ θαε ἴση ἐστὶν ἡ ζε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ λβε, ἴση ἡ εν. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ καε ἴση ἡ ρε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ μβε, ἴση ἡ εc. τὸ ἄρα ὑπὸ ζ ε ν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρ ε c. ἀλλ' ὡς ἡ γ τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρ ε c πρὸς τὸ ἀπὸ ε ν. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζ ε ν πρὸς τὸ ἀπὸ ε ν. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ζ ε ν πρὸς τὸ ἀπὸ ε ν, οὕτως ἡ ζε πρὸς εν, καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εν, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση δὲ ἡ θα τῇ ζα. ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε. εὐθείας ἄρα δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς ακ, καὶ λόγου τοῦ τῆς γ πρὸς τὴν δ, εἴληπται ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ ε, καὶ προστέθησαν εὐθεῖαι αἱ ζα, ηβ, καὶ γέγονε τῷ δοθέντι λόγῳ ἡ ζε πρὸς εν. ἔτι τε ἐστὶν ὡς ἡ δοθεῖσα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. ὡς δὲ αὐτὴ ἡ δοθεῖσα ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

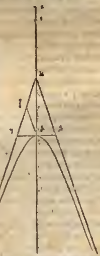
Τούτου δεδειγμένου δυνατόν ἐστι τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν οὕτως. ἔστω γὰρ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν δεῖ ἔχειν τὰ τμή-

ματα

ματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα, ὃ τῆς γ̄ πρὸς τὴν δ̄, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἔστω τὸ ε̄, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ᾱβ σημεῖον τὸ ζ, καὶ προσκείσθωσαν αἱ η̄α, θ̄β. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ̄ πρὸς τὴν δ̄, οὕτως τὴν η̄ζ πρὸς τὴν ζ̄θ. ἔτι τε εἶναι, ὡς μὲν τὴν η̄α πρὸς ᾱζ, οὕτως δοθεῖσαν τὴν ε̄β πρὸς β̄ζ. ὡς δὲ τὴν θ̄β πρὸς β̄ζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τὴν ε̄α πρὸς ᾱζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν ποιεῖν προδέδεικται. καὶ διὰ τοῦ ζ̄ τῇ ᾱβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ κ̄λζ. καὶ διὰ τῆς κ̄λ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν πρὸς τὴν ᾱβ τεμνέτω τὴν σφαῖραν. λέγω ὅτι τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλ-



ληλα λόγον ἔχει τὸν τῆς γ̄ πρὸς τὴν δ̄. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ η̄α πρὸς ᾱζ, οὕτως ἡ ε̄β πρὸς β̄ζ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα ἡ η̄ζ πρὸς ζ̄α, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, β̄ζ πρὸς β̄ζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν κ̄λ, ὕψος δὲ τὴν ζ̄η, ἴσος δὴ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν ζ̄α. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ θ̄β πρὸς β̄ζ, οὕτως ἡ ε̄α πρὸς ᾱζ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ θ̄ζ πρὸς β̄ζ, οὕτως συναμφότερος ἡ εα, ᾱζ πρὸς ᾱζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν κ̄λ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ζ̄θ ἴσος δὴ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν β̄ζ. ἐπεὶ οὖν οἱ εἰρημένοι κῶνοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη, τουτέστιν ὡς ἡ θ̄ζ πρὸς ζ̄η, τουτέστιν ἡ γ̄ πρὸς τὴν δ̄, καὶ τὰ τμήματα ἄρα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν δοθέντα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολὴν, δείξομεν οὕτως. ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γ̄α, ᾱβ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ ᾱ, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ δ̄. καὶ προσκείσθω διὰ τοῦ δ̄ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς γα, ᾱβ γράψαι ὑπερβολήν. ἐπεζεύχθω ἡ ᾱδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε̄. καὶ κείσθω τῇ δ̄α ἴση ἡ ᾱε, καὶ διὰ τοῦ δ̄ τῇ ᾱβ παράλληλος ἤχθω ἡ δ̄ζ. καὶ κείσθω τῇ ᾱζ ἴση ἡ ζ̄γ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γ̄δ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β̄, καὶ τῷ ἐκ τῆς γ̄β ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ δ̄ε, η, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ᾱδ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ δ̄ ὑπερβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ περὶ τὴν ε̄η ὑπερβάλλοντα, ὅμοιον τῷ ὑπὸ δ̄ε, η. λέγω ὅτι τῆς γεγραμμένης ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοι εἰσὶν αἱ γ̄α, ᾱβ, ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν

ἡ δζ τῇ βα, καὶ ἴση ἡ γζ τῇ ζα, ἴση ἄρα καὶ ἡ γδ τῇ δβ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν γβ τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν γδ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ γβ ἴσον τῷ ὑπὸ δεκ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ γδ, δβ, τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ δεκ ὅλους. αἱ ἄρα γα, κβ ἀσύμπτωτοι εἰσὶ τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων.

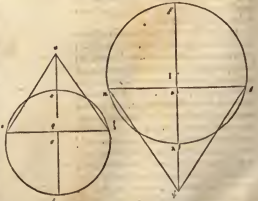
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Δ.

Ἐν δὲ τῇ συνθέσει παραβάλλων τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας τὴν δβ, καὶ ἀριθμένης τῆς ἡμίσειαν αὐτῆς ἴσην τῇ ζβ. καὶ τεμὼν αὐτὴν εἰς τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ θ, καὶ ἔτι τῆς δβ λαβὼν τὸ χ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὰ αὐτὰ κατασκευάζων τοῖς πρότερον φησί, ὅτι γεγονέτω ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ τίθησι τὸ ρ μεταξὺ τῶν θ, ζ. ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει δεικτέον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς χβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ κβ πρὸς ρβ, ἡ δχ πρὸς βχ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. τουτέστιν ἡ ζβ τῆς βρ, ὥστε τὸ ρ ἐντὸς τοῦ ζ πεσεῖται. ὅτι δὲ καὶ ἐκτὸς τοῦ θ, δειχθήσεται ὁμοίως τοῖς ἐν τῇ ἀναλύσει περιλαβοῦσι πάσας τῆς συνθέσεως τοῦ θεωρήματος. συνάγεται γὰρ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ρχ πρὸς χλ, ἡ ζθ πρὸς θβ, ὥστε καὶ συνθέντι. καὶ διὰ τοῦτο γὰρ ἀκόλουθος τοῖς ἄνω εἰρημένοις καὶ ἐνταῦθα ἡ λέξις.

Καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ. τεταραγμένην ἀναλογίαν ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, ὅταν ᾖ ὡς μὲν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον. ὡς δὲ ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι ἐν τοῖς πρώτοις, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. κἀνταῦθα οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡγούμενον ἡ ρλ πρὸς ἑπόμενον τὴν λδ, οὕτως ἡγούμενον ἡ χζ πρὸς ἑπόμενον τὴν ζθ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ δλ πρὸς ἄλλο τι τὴν δχ, οὕτως ἄλλο τι ἡ εζ πρὸς ἡγούμενον τὴν χζ. ἔπεται ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς δέδεικται ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν στοιχείων, ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ εζη τμῆμα τῷ θκλ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ εζα κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ καταγραφαὶ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ εη, ηζ, εο, οζ, θλ, λκ, θξ, ξκ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ εζη, θκλ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ εηζ, θλκ γωνίαι, ὥστε καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς φ, υ. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ηφζ τρίγωνον τῷ λυκ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, οὕτως ἡ λυ πρὸς υκ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἰσογωνίων ὄντων τῶν φζο, υκξ τριγώνων. ἔστιν ὡς ἡ ζφ πρὸς φο, ἡ κυ πρὸς υξ. δι' ἴσου



ἄρα ὡς ἡ ηφ πρὸς φο, ἡ λυ πρὸς υξ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ηο πρὸς οφ, ἡ λξ πρὸς ξυ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς ἡ σο πρὸς οφ, ἡ ρξ πρὸς ξυ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ σοφ πρὸς φο, τουτέστιν ἡ ωφ πρὸς φη, οὕτως συναμφότερος ἡ ρξυ πρὸς ξυ. τουτέστιν ἡ ψυ πρὸς υλ. ἀλλ' ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, ἡ λυ πρὸς υκ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς φζ, ἡ ψυ πρὸς υκ, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ ωφ πρὸς εζ, ἡ ψυ πρὸς θκ. τῶν ἄρα ωεζ ψθκ κώνων

κώνων ἀνάλογόν εἰσιν οἱ ἄξονες καὶ διάμετροι τῶν βάσεων. ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λόγος δὲ τοῦ ω φ πρὸς τὴν ε ζ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῆς σφαιρῶν δεδομένας, εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων, ὥστε δέδοται ἡ ε ζ καὶ ἡ η φ, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς ε ζ ἡ ε φ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ η φ ο. ἐὰν δὲ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ πλάτος ποιεῖ δοθεῖσαν, δοθεῖσα ἄρα ἡ φ ο, ἀλλὰ καὶ ἡ φ η. καὶ ὅλη ἄρα ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας δοθεῖσά ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡμίσεια αὐτῆς δέδοται ἡ ς ο, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ο φ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ς ο πρὸς ο φ λόγος. καὶ συνθέντι ὡς συναμφοτέρου τῆς ς ο φ πρὸς τὴν ο φ λόγος δοθείς ἐστι, τουτέστι τῆς ω φ πρὸς φ η. καὶ δέδοται ἄρα καὶ ἡ ω φ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ε ζ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ω φ πρὸς ε ζ λόγος. τὰ αὐτὰ δὲ ἂν ῥηθείη καὶ ἐπὶ τοῦ α β γ τμήματος. καὶ συναχθήσεται ὁ τῆς χ τ πρὸς α β λόγος δοθείς, καὶ διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν α β, δοθεῖσα ἐστὶ καὶ ἡ χ τ.

Ὅτι δὲ ἂν τὰ τμήματα δεδομένα ᾖ, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν δοθήσονται, πρόδηλον μέν. ἵνα δὲ καὶ τοῦτο ἀκολούθως τῇ στοιχειώσει τῶν δεδομένων δοκῇ συνάγεσθαι, λεχθήσεται. ἐπειδὴ δέδοται τὰ τμήματα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ ἡ ε ζ. καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία, ὥστε καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς, καὶ ἐὰν νοήσωμεν ἐπιζευγνυμένην τὴν ε η δεδομένης τῆς πρὸς τῷ φ ὀρθῆς. δεδομένη ἔσται καὶ ἡ λοιπή. καὶ τὸ ε η φ τρίγωνον τῷ εἴδει. ὥστε καὶ ὁ τῆς ε φ πρὸς φ η λόγος δοθεὶς ἔσται. καὶ δέδοται ἡ ε φ ἡμίσεια οὖσα τῆς ε ζ. δέδοται ἄρα καὶ ἡ φ η. φησὶ δὲ καὶ ἄλλως λέγειν. ἐπειδὴ δέδοται ἡ ε ζ τῇ θέσει, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ φ, διχοτομία γάρ ἐστι τῆς ε ζ, πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ φ η τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ τμήματος τῇ θέσει, δέδοται ἄρα τὸ η. ἦν δὲ καὶ τὸ φ δεδομένον. δέδοται ἄρα καὶ ἡ φ η. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ψ υ πρὸς χ τ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς β α πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ κ θ πρὸς δ. ἐπεὶ γὰρ γέγονεν ὡς ἡ ψ υ πρὸς θ κ, ἡ χ τ πρὸς δ. ἐναλλὰξ ἡ ψ υ πρὸς χ τ ἡ κ θ πρὸς δ. ἀλλ' ὡς ἡ ψ υ πρὸς χ τ, τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν κώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς δὲ αἱ βάσεις πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ β α πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ἡ θ κ πρὸς τὴν δ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ α β πρὸς θ κ, ἡ ς πρὸς δ. ἐπειδὴ τοῦ λόγου τοῦ ἀπὸ τῆς β α πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ τῆς β α πρὸς ς, καὶ ὁ τῆς κ θ πρὸς δ. καὶ ὁ τῆς β α ἄρα πρὸς ς, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κ θ πρὸς δ. ὥστε ἐναλλὰξ ἐστὶν ὡς ἡ β α πρὸς θ κ, ἡ ς πρὸς δ.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ε.

Ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ α β, θ κ, ς, δ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ἡ θ κ πρὸς δ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην. ἐναλλὰξ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἀλλ' ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην.

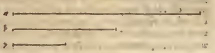
ΕΙΣ ΤΟ Ϛ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ κ λ μ τῷ α β γ τμήματι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρ λ πρὸς ρ ν, ἡ β π πρὸς π θ, ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ μ ν, γ θ. ἐπεὶ ὅμοια ἐστὶ τὰ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ πρὸς τοῖς β λ γωνίαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, γ ὀρθαί. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ, καὶ ἰσογώνιά ἐστι τὰ τρίγωνα. καὶ ἔστιν ὡς ἡ θ β πρὸς β γ, οὕτως ἡ λ ν πρὸς μ ν. ἀλλ' ὡς ἡ β γ πρὸς β π, ἡ μ ν πρὸς ν ρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν γ β π, μ ν ρ τριγώνων. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ β θ πρὸς β π, ἡ λ ν πρὸς ν ρ. ὥστε καὶ διελόντι, ὡς ἡ β π πρὸς π θ, οὕτως ἡ λ ρ πρὸς ρ ν. λόγος δὲ τῆς ε ζ πρὸς β γ δοθείς, δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα, ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων. ὥστε ἐπεὶ δέδοται ἡ α γ, δέδοται καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ γ π. δέδοται δὲ καὶ ἡ β π, καὶ ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσιν. δέδοται ἄρα καὶ ἡ β γ διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἡ ε ζ δοθεῖσα ἐστίν. ὥστε καὶ ὁ τῆς β γ πρὸς ε ζ λόγος δοθείς ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ϛ.

Ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κ μ, α γ τμήματα κύκλων. ἐὰν γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει ἐπιζευχθῶσιν αἱ γ θ, μ ν. ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς γ, μ. καὶ κάθετοι αἱ γ π, μ ρ. μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη ἡ β π, πρὸς τὴν τρίτην τὴν π θ,

γ, ὥστε τὴν α πρὸς τὴν β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν β πρὸς τὴν γ. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν α, γ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς β. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν α πρὸς τὴν β, οὕτως τὴν β πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς γ, ἐπειδὴ ἐλάττονα ἔχει τὸν τῆς β πρὸς γ λόγον, καὶ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς α καὶ τῆς μείζονος τῆς γ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α, γ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς β.



Τὸ ἄρα ὑπὸ θζ, κ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. ὡς γὰρ ἡ θζ πρὸς ζη, οὕτως τὸ ὑπὸ θζ, η πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. τὸ δὲ ὑπὸ θζ, η τοῦ ἀπὸ ζκ ἔλασσον. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζ, δ τοῦ ὑπὸ τῶν βε, δ. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ βδ, ε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εδ. τὸ δὲ ὑπὸ βζ, δ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ δῆλον ὅτι ὅσῳ τῆς διχοτομίας ἐφίστησιν τὸ ζ μεῖζον, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων. μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων, ὥστε εὐθεῖα ἐάν εἰς ἄνισα τμηθῇ κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἔγγιον τῆς διχοτομίας, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἀπωτέρων τμημάτων.

Ἡ βζ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ. καθόλου γὰρ ἐὰν τέσσαρες ὅροι ὡς οἱ α, β, γ, δ, ε. καὶ ἢ τὸ ὑπὸ τῶν α, δ ε, ἔλασσον τοῦ ὑπὸ β, γ, ὁ α πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δ ε. ἔστω γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν β, γ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν α, ζ ε. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ γ πρὸς τὸν ζ ε. ὁ δὲ γ πρὸς τὸν ζ ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν ε δ. καὶ ὁ α ἄρα πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δ ε.



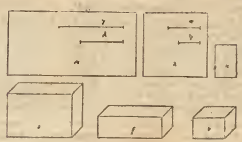
Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ὑπὸ θν πρὸς τὸ ὑπὸ νκ. ἐπεὶ γὰρ τῷ ὑπὸ θβ, κ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ βν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν ὡς ἡ θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ θβ πρὸς βκ. οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς τρίτης, τουτέστι τὸ ὑπὸ βν πρὸς τὸ ὑπὸ βκ, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. συνθέντι ὡς ἡ θν πρὸς νβ, ἡ κν πρὸς κβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ θν πρὸς νκ, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ θν πρὸς τὸ ὑπὸ νκ, οὕτως τὸ ὑπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ νβ πρὸς τὸ ὑπὸ βκ, οὕτως ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βκ. ἔστιν ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βκ, οὕτως τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ὑπὸ νκ. τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ὑπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. πάλιν γὰρ δύο ἀνίσας ταῖς θζ, ζκ προστεθῇ ἡ νζ, καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον ἡ θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θν πρὸς νκ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. τὸ ἄρα ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βκ, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζη. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς κζ πρὸς ζη. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ αβ, γ, δ. ὥστε τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν γ πρὸς τὴν δ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν γ, δ μέση ἀνάλογον ἡ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ λόγος διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς αβ πρὸς γ. ὁ δὲ τῆς γ πρὸς τὴν δ διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς γ πρὸς ε, καὶ ἡ αβ ἄρα πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ πρὸς ε. γεγονέτω οὖν ὡς ἡ ε πρὸς τὴν γ, ἡ γ πρὸς βζ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ βζ, γ, ε, δ, ἡ βζ ἄρα πρὸς δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βζ πρὸς γ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς ε. ἔχει δὲ καὶ ἡ γ πρὸς δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς γ πρὸς ε, ἡ ἄρα βζ πρὸς δ ἡ-



μιόλιον

ΛΗΜΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΞΗΣ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ὅροι οἱ α, γ, δ, β. λέγω ὅτι ὁ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν α, β πρὸς τὸ ἀπὸ γ μετὰ τοῦ τῆς β πρὸς δ λόγου, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ α β ἴσος ὁ κ, τῷ δὲ ἀπὸ γ ἴσος ὁ λ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ β πρὸς δ, οὕτως ὁ λ πρὸς μ. ὁ ἄρα τοῦ κ πρὸς μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ κ πρὸς λ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ λ πρὸς μ, τουτέστι τοῦ β πρὸς δ. ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν ποιείτω. ὁ δὲ λ τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν ξ ποιείτω. τὸν δὲ δ πολλα-



πλασιάσας, τὸν ο. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν α β ὁ κ ἐστιν, ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν πεποίηκεν, ὁ ἄρα ν ἐστὶν ὁ ὑπὸ α β ἐπὶ τὸν β, πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ γ ὁ λ ἐστιν. ὁ δὲ λ τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν ο πεποίηκεν. ὁ ο ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸν δ, ὥστε ὁ τοῦ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερος τῶν κ, λ τὸν β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τὸν ν, ξ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ν πρὸς ξ. πάλιν ἐπεὶ ὁ λ ἑκάτερον τῶν β, δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν ξ, ο πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ ξ πρὸς ο. ἀλλ᾽ ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ λ πρὸς τὸν μ. καὶ ὡς ἄρα ὁ λ πρὸς μ, ὁ ξ πρὸς ο. οἱ ἄρα κ, λ, μ τοῖς ν, ξ, ο ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ πρὸς μ, οὕτως ὁ ν πρὸς ο. καὶ ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸν ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ. ὁ δὲ τοῦ ν πρὸς ο λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ δ β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸν ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ.

Φανερὸν δὲ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὸν κ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως τὸ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, τῆς β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ὦσιν. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. ὁ ἄρα ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὴν α.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ Η.

Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς ἐὰν δύο μεγεθῶν ληφθῇ τὸ μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ τὸ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων ὧν ἔχουσι πάντα κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη. καὶ ἐνταῦθα οὖν φησί, ὅτι ὁ τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ β α δ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον. καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα. δηλαδὴ τοῦ δ α β τμήματος, καὶ τοῦ β γ δ μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κωνικῶν. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸν β α δ κῶνον, ὁ τῆς κ θ ἐστὶ πρὸς θ γ, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου. ἐλέγετο γὰρ τὸ τμῆμα πρὸς τὸν ἐν ἴσῳ τῷ κώνῳ.

τῷ κώνῳ τὸν αὐτὸν ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὁ δὲ τοῦ βαδ κώνου πρὸς τὸν βγδ κῶνον, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θγ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. ὁ δὲ τοῦ βγδ κώνου πρὸς τὸ βγδ τμῆμα, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θζ, διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος, ὥστε ὁ τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ τῆς κθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς κθ πρὸς θγ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ ὁ τοῦ ὑπὸ κθα ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ κθα πρὸς τὸ ἀπὸ γθ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ, ὁ τοῦ ὑπὸ κθα ἐστὶν ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ κθα ἐπὶ τὴν θα, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ. καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι, ὅτι τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου, δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ βαδ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ βγδ. τουτέστι τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θγ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσι θεωρήμασι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τῆς θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ ἐλάσσονα, ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. ἀλλὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ λόγου διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τῆς θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ, τῆς θκ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. καὶ ἄρα δειχθήσεται, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. τουτέστιν ὅτι μείζων ἡ ζθ τῆς θκ. ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν. ἀνίσοις γὰρ ταῖς αθ, θγ ἴσαι πρόσκεινται αἱ ζα, γκ.

Ταῦτα εἰπών, αὐτὸς μὲν ἐπὶ τὴν ἀπαγωγὴν τῆς συνθέσεως, ἡμεῖς δὲ αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ζθ τῆς θκ μείζων ἐστὶ, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. ὥστε τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ, τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ λόγος διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν ὃν ἔχει ἡ αθ πρὸς θγ, τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἑξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἐπάγει. φημὶ δὲ ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸν ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον. ὁ γὰρ τῆς αβ πρὸς βγ διπλάσιος μέν ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ βγ τετράγωνον. τριπλάσιος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον. ὡς γὰρ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θβ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, αβθ τριγώνων. ἐὰν δὲ ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογόν εἰσιν, ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον, ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ τετράγωνον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν. ἀλλ' ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. φημὶ οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ ἀπὸ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον, τουτέστιν ὁ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ

θβ. καὶ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ διπλασίων τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ. προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αθ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. ἑκάτερος γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστι τριπλάσιος. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστι πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς θβ πρὸς θγ, τῆς βθ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης. ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς βθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ τῆς βθ πρὸς θγ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τῆς βθ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ θβ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θκ, τῆς θκ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. φημὶ δὲ ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θκ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστι. δεικτέον ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θκ, τουτέστι τοῦ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θκ πρὸς θζ. ἐὰν γὰρ ὦσι τέσσαρες ὅροι ὡς ἐνταῦθα, τὸ ἀπὸ γθ καὶ τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ ἡ θκ καὶ θζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ᾖ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς δέδεικται αὐτόθι. [illegible] ἐχρῆν δεῖξαι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θκ. τουτέστι τοῦ δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θκ πρὸς θζ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἡ γθ πρὸς θβ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ γθ πρὸς θβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θκ πρὸς θζ. τουτέστιν ἡ κθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ. καὶ ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ βλ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ κθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἴση δέ ἐστιν ἡ θζ συναμφοτέρῳ τῇ θακε. ἡ γὰρ αζ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ κθ πρὸς συναμφότερον τὴν θακε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς κθ τῆς γθ. ἀπὸ δὲ τῆς κε τῆς ελ ἴσης τῇ βθ δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γκ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν αθ κλ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἐπεὶ γὰρ δεῖ δειχθῆναι, ὅτι ἡ κθ πρὸς συναμφότερον τὴν θακε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ κθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θακε πρὸς θβ, τουτέστι πρὸς λε, καὶ διελόντι ἡ κγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θακλ πρὸς λε, τουτέστι πρὸς βθ. ἐναλλάξ, ὅτι ἡ κγ πρὸς συναμφότερον τὴν θακλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἀλλ' ὡς ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτως ἡ θβ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ λε πρὸς αθ. ὅτι ἄρα ἡ κγ πρὸς συναμφότερον τὴν θακλ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ λε πρὸς αθ. καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ γκ, τουτέστιν ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλθα πρὸς θα, διελόντι ἡ κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ αὐτὴ ἡ κλ πρὸς θα. τουτέστιν ὅτι ἐλάσσων ἡ λε τῆς θα ἐστίν. ἑξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν, ἐπεὶ ἡ λε τῆς αθ ἐλάσσων, ἡ ἄρα κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κλ πρὸς αθ. συνθέντι ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς αθ. ἡ δὲ λε τῇ βθ ἐστιν ἴση. ἡ ἄρα κγ πρὸς βθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς αθ. ἐναλλάξ, ἡ ἄρα κγ πρὸς συναμφότερον τὴν κλαθ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βθ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς θβ. ἐναλλάξ ἡ κγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς θβ. συνθέντι ἡ κθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ μετὰ τῆς θβ, τουτέστι συναμφότερος ἡ αθκε πρὸς βθ. ἴση δὲ ἡ κε τῇ αζ. ἡ ἄρα κθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ πρὸς θβ. ἐναλλάξ ἡ κθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἡ ἄρα κθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θκ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θκ, τουτέστι τὸ ἀπὸ

αθ ἐπὶ

α θ ἐπὶ τῆς θ κ, πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β, ἐπὶ τὴν θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ, τῆς ἀπὸ β θ μέσου λαμβανομένης, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, καὶ τοῦ ἀπὸ β θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ β θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς β θ πρὸς θ γ, τουτέστι τῷ τῆς α θ πρὸς β θ. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τῆς θ ζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, μετὰ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ β. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, καὶ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ β, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς α θ κύβου, πρὸς τὸν ἀπὸ θ β κύβον, τουτέστι τοῦ ἀπὸ α β κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ β γ κύβον. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ θ ζ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ α β κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ β γ κύβον. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς α β κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β γ κύβον λόγος, ἡμιόλιος ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Δῆλον δὲ ὅτι ἡ β α τῆς μὲν α κ ἐλάσσων ἐστὶ, ἢ διπλασία δυνάμει. τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων, ἢ διπλασία. ἐπιζευχθείσης γὰρ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ κέντρον, τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμβλείας γινομένης ὑπὸ τῆς β α, τὸ ἀπὸ τῆς α β μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν ἴσων ὄντων. ὥστε τοῦ ἑνὸς αὐτῶν, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μεῖζόν ἐστιν, ἢ διπλάσιον. πάλιν δὲ τοῦ ἀπὸ α β ἴσου ὄντος τοῖς ἀπὸ α κ, κ β. καὶ μείζονος ὄντος τοῦ ἀπὸ α κ τοῦ ἀπὸ κ β, τὸ ἀπὸ α β τοῦ ἀπὸ α κ ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ σχήματος, ἐφ' οὗ σημεῖον θ. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ σχήματι τἀναντία τούτοις εἰκότως λεχθήσεται.

Ἔστω τῇ ε λ ἴση ἡ ε ν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θ ζ, κῶνος ἔσω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτός ἐστι τῷ κατὰ τὴν θ ε ζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θ ζ, ὕψος δὲ τὴν δ ε, τοῦ μὲν κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, καὶ ὕψος ἴσον, τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου ἡμιόλιος. τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου. ἔστι δὲ καὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θ ζ κύκλον. ὕψος δὲ τὴν λ ν, διπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κώνου. καὶ τὸ ἡμισφαίριον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζ θ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν λ ν.

Τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν α ρ γ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν α κ γ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. εἴρηται γὰρ αὐτόθεν, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄνισα, κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν περὶ τὴν ἐγγυτέραν τῆς διχοτομίας τομὴν μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν περὶ τὴν ἀπωτέρω. ταὐτὸν δέ ἐστιν εἰπεῖν, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. ὅσῳ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶ, τοσούτῳ πλέον ἀφίσταται ἡ τομὴ τῆς διχοτομίας.

Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς α ρ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν α κ, γ ξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α β. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ β γ διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον ἦχθαι τὴν β κ, καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοια εἶναι τῷ ὅλῳ, γίνεται τὸ ὑπὸ γ α κ ἴσον τῷ ἀπὸ α β, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας τῆς γ α, καὶ α κ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γ ξ α κ ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ α β, τουτέστι τῷ ἀπὸ α ρ.

Μεῖζον οὖν ἐστι καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ α κ, γ ξ, τῷ ἀπὸ α ρ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ α ρ γ τοῦ ὑπὸ α κ γ. ἐὰν δὲ ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, καὶ ἐκεῖνο μεῖζον, ὃ καὶ ἐξ ἀρχῆς μεῖζον, τῷ ὑπὸ α ρ γ προστεθέντος τοῦ ἀπὸ α ρ, τῷ δὲ ὑπὸ α κ γ τοῦ ὑπὸ α κ γ ξ, μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ α ρ γ μετὰ τοῦ ἀπὸ α ρ, τοῦ ὑπὸ α κ γ, μετὰ τοῦ ὑπὸ α κ γ ξ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ α ρ γ, μετὰ τοῦ ἀπὸ α ρ ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ γ α ρ, διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. τὸ δὲ ὑπὸ α κ γ μετὰ τοῦ ὑπὸ α κ γ ξ ἴσον τῷ ὑπὸ α κ α ξ, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, ὥστε τὸ ὑπὸ γ α ρ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ α κ ξ. τῷ δὲ ὑπὸ τῆς ξ κ α ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῆς μ κ γ. ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ξ γ πρὸς γ κ, ἡ μ α πρὸς α κ. ὥστε καὶ συνθέντι ὡς ἡ ξ κ πρὸς κ γ, οὕτως ἡ μ κ πρὸς κ α. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ξ κ α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ μ κ γ. ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῆς ξ κ α μεῖζον ἦν τὸ ὑπὸ γ α ρ. καὶ τὸ ὑπὸ γ α ρ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ μ κ γ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ α γ πρὸς γ κ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς α ρ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες εὐθεῖαι

εἰσὶν αἱ γκ, κμ, γα, αρ. καὶ τὸ ὑπὸ πρώτης τῆς γα καὶ τετάρτης τῆς αρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ δευτέρας τῆς μκ, καὶ τρίτης τῆς κγ. ἡ πρώτη ἡ γα πρὸς δευτέραν τὴν μκ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τρίτη ἡ κγ πρὸς τετάρτην τὴν αρ. καὶ ἐναλλὰξ ἡ γα πρὸς κγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς βγ, διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον εἶναι τὴν βγ, γίνεται ὡς ἡ αγ πρὸς γβ, ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ὅμοιον γὰρ τὸ αβκ τῷ αβγ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἡ δὲ αγ πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. καὶ τὸ ἀπὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἥμισυ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ αβ. ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ αρ, πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡμίσεια τῆς μκ πρὸς τὴν αρ. τουτέστιν ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ αρ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ζλ. ἐπειδὴ ἡ μὲν αβ τῇ εζ ὑπόκειται ἴση, ἡ δὲ εζ τῇ ζλ δύναμει διπλῆ. ἴση γὰρ ἡ ελ τῇ λζ, τῆς δὲ αρ διπλασία ἡ νλ. ἐπεὶ καὶ τῆς λζ. ὥστε τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν θζ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς νλ. ὥστε μεῖζόν ἐστιν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον, τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν ὡς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, οὕτως τὴν κμ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς λν. καὶ ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐλάσσονα εὐθεῖαν, ἴσος μὲν τῷ μβδ διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐλάττων δὲ τοῦ νθζ διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντας πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ὕψη. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟμνημα εἰς τὸ δεύτερον τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθέντος ὑπὸ τοῦ μιλησίου μηχανικοῦ ἰσιδώρου ἡμετέρου διδασκάλου.

Εὐτοκίου πίνυτε γλυκερὸς πόνος, ὅν ποτ' ἐκεῖνος
γράψεν τοῖς φθονεροῖς πολλάκι μεμψάμενος.

Εὐτοκίου.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙμήδους τοῦ κύκλου μέτρησιν.

Ἐχόμενον ἂν εἴη τὸν ἐμὸν πληροῦντι σκοπὸν τοῖς σαφεστέροις, καὶ βραχυτέρας ἐπιστάσεως δεομένοις, τῶν ὑπὸ ἀρχιμήδους γεγραμμένων ἐντυγχάνοντι, καὶ τὰ ὁποσοῦν ἐν αὐτοῖς ἐπεξεργασίας δεόμενα, τὸν δυνατὸν τρόπον συνεχῆ ποιεῖν τοῖς πρότερον ὑφ᾽ ἡμῶν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις, ἔχοντι ὡς ἀληθῶς ἀξίου τυγχάνοντος τοῦ καὶ τοῖς μείζοσι καὶ πλείονος φροντίδος δεομένοις ἐπιστῆσαι. εἴη δὲ ἂν ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ἐφεξῆς τὸ γεγραμμένον ἀρχιμήδει βιβλίδιον κύκλου μέτρησιν τὴν ἐπιγραφὴν ἔχον, ἐν ᾧ τὴν πρόθεσιν τἀνδρὸς, ἐξ αὐτῆς τῆς ἐπιγραφῆς γνωρίζομεν. βούλεται γὰρ ἐπιδεῖξαι τίνι χωρίῳ εὐθυγράμμῳ ἴσος ἂν εἴη κύκλος, πρᾶγμα πάλαι πρὸς τῶν πρὸ αὐτοῦ κλεινῶν φιλοσόφων ἐζητημένον. δῆλον γὰρ ὅτι τι ἂν εἴη τὸ ζητούμενον, ὅπερ ἱπποκράτης τε ὁ χῖος καὶ ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὑρήκασιν, οὓς ἀκριβῶς εἰδέναι νομίζω. τούς τε τὴν εὐδήμου γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους, καὶ τῶν ἀριστοτελικῶν μετασχόντας κηρίων. ἀλλ᾽ ἔστι μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον, ὥς φησιν ἡρακλείδης ἐν τῷ ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον. δείκνυσι γὰρ, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει, ἔλαττον μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μεῖζον δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. τοῦτο οὖν φησὶ σύνεγγυς δεδεῖχθαι, εὑρῆσθαι μέντοι αὐτῷ διά τινων ἑλίκων εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κύκλου περιφερείᾳ.

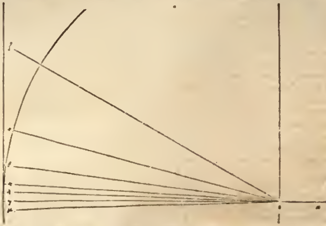
ΕΙΣ ΤΟ Α΄ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ προῦπτον θεώρημα καὶ τοῖς ἐπὶ ποσὸν μαθημάτων γυμνασαμένοις, οὐδεμίαν ἔχον ζήτησιν φαίνεται, αὐτοῦ τοῦ ἀρχιμήδους ῥημάτων σαφῶς ἐκτεθειμένων, καὶ τὸ συμπέρασμα πρὸς τὴν πρότασιν ἀναλόγως ἁρμοζόντων. δοκεῖ δέ τι κατακεχρῆσθαι περὶ τὴν ἀπόδειξιν πράγματι μηδέπω δεδειγμένῳ. ἐκθέμενος γὰρ τρίγωνον ὀρθογώνιον φησὶν, ἐχέτω τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν δὲ λοιπὴν τῇ περιφερείᾳ, ἀλλὰ τῇ περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν λαβεῖν, οὐδὲ πῶς αὐτοῦ ἤδη δεδειγμένον ἐστὶν, ἀλλ᾽ οὐδὲ ὑπ᾽ ἄλλου παραδεδομένον. συνορᾶν δὲ ὅμως χρὴ, ὡς οὐδὲν ἔξω τῶν προσηκόντων ὑπ᾽ ἀρχιμήδους γράφεται. ἔστιν γὰρ τὸ μέγεθος τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, παντί που δῆλον. οἶμαι καὶ τοῦτο τῶν ἐφ᾽ ἓν διαστατῶν. ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα τοῦ αὐτοῦ εἴδους. κἂν εἰ μηδέπω οὖν ἐφαίνετο δυνατὸν περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ᾽ ὅμως εἶναι τινὰ τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ παρ᾽ οὐδενὸς ἐστὶ ζητούμενον. τὸ τοίνυν καὶ παρὰ ἀρχιμήδους προτεθὲν τοιοῦτον ἐστίν. ὅτι τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον ὡς περιεχούσας τὰς πλευρὰς, ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ, ὥς τε τὸ προτεθὲν ἐκθέμενος οὐδεμίαν ἂν καταχρήσεως κρίνοιτο. θαύματος δὲ ἂν μᾶλλον καὶ τούτοις δόξειεν τοῖς οὕτως ὑπερμεγέθεσι τῶν ζητημάτων σαφῆ καὶ ῥᾳδίαν τὴν εὕρεσιν ἐπιτιθείς. ὡς δὲ εἴρηται, οὐδὲ μιᾶς ζητήσεως τῷ πρώτῳ θεωρήματι. τὸ γὰρ περὶ τὸ τρίγωνον, ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ α ζ ο μ σχήματος. καὶ ὅτι ἁπλῶς περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, δυνατὸν εὐθύγραμμον περιγράψαι, ὥς τε τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τῶν τοῦ κύκλου περιφερειῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγραφομένου εὐθυγράμμου, ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου, σαφῶς εἴρηται ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις ἡμῖν.

ΕΙΣ ΤΟ Γ΄ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου ἀδύνατον. ἀριθμὸν μὲν γὰρ ἐφ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενον ποιεῖ τινὰ τετράγωνον ἀριθμόν. ὃς δὲ καὶ μόριον ἐφ᾽ ἑαυτὰ γινόμενα, οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον. ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δυναμένην πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν ἥρωνι ἐν τοῖς μετρικοῖς, εἴρηται δὲ πάππῳ καὶ θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν, ἐξηγουμένοις τὴν μεγάλην σύνταξιν τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου, ὥς τε οὐδὲν ἡμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν, ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκεί-

νου ἀναλέγεσθαι, καὶ ἡ ὑπὸ γεζ τρίτον ὀρθῆς. ἐὰν γὰρ τὴν τοῦ ἑξαγώνου περιφέρειαν διχοτομήσαντες, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς πρὸς τῷ β ἀπολαβόντες ἐπιζεύξωμεν τὴν εζ. καὶ ἡ ὑπὸ γεζ τρίτον ὀρθῆς. ἡ γὰρ πρὸς τῷ γ ἀπολειφθεῖσα περιφέρεια ἡμίσεια οὖσα τῆς τοῦ ἑξαγώνου δωδέκατόν ἐστι τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γεζ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ οὖσα, δωδέκατόν ἐστι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, τρίτον ἄρα ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τϛ πρὸς ρνγ. ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς ζγ, δῆλον γίνεται. ἐὰν γὰρ προσεκβαλόντες τὴν ζγ ἐπὶ τὸ μ. καὶ ἴσην αὐτῇ ἀποθέμενοι ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τοῦ ε. συναχθήσεται ἡ πρὸς τῷ μ γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ



ε γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ διμοίρου· ἰσοπλεύρου ἄρα τριγώνου ἥμισυ ἐστὶ τὸ γεζ, καὶ διὰ τὸ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοπλεύρου ἴσην οὖσαν τῇ εζ δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ γ, διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς γζ. ἡ δὲ εγ πρὸς γζ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εζ ὑπόκειται τϛ. ἐὰν αὐτὴν ἐφ' ἑαυτὴν πολυπλασιάσωμεν, γενήσονται $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$ ͵γχλϛ. ἡ δὲ γζ ἐστι ρνγ. ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῆς ἔσται $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ εγ, γζ. ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀπὸ εζ ὄντος $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$ ͵γχλϛ, ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γζ ὑπάρχον $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ, καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ εγ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκζ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ σξε. καὶ ἔτι μόριον ἐλάχιστον καὶ ἀναίσθητον. λείπει γὰρ ἡ τῶν σξε δύναμις τοῦ ἀκριβοῦς μονάσιν β. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εζ τϛ	ἡ ζγ ρνγ	λοιπὸν τὸ ἀπὸ εγ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκζ
ἐπὶ τϛ	ἐπὶ ρνγ	τὰ δὲ σξε ἐφ' ἑαυτὰ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκε
$\overset{\theta}{\mathrm{M}}$ ͵αω	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ͵ετ	ἐπεὶ δ' ἐλάσσω ἄρα $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$ β
͵αωλϛ	͵ζχν	$\overset{\epsilon}{\mathrm{M}}$ $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ͵β ͵α εἰς τὸ ἀκριβές
ὁμοῦ $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$ ͵γχλϛ	υνθ	$\overset{\epsilon}{\mathrm{M}}$ ͵β ͵γχτ
	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ	͵ατκε

Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ, διὰ τὸ τρίτον θεώρημα τοῦ ἕκτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς εγ, ἡ ζγ πρὸς γη. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. συναμφότερος δὲ ἡ εζ, εγ μείζων ἐστὶν ἤπερ φοα. ἡ μὲν γὰρ ζε ὑπόκειται τϛ. ἡ δὲ εγ σξε καὶ ἔτι μορίου τινός. ὥστε μείζων εἰσὶ τῶν φοα. ἡ δὲ ζγ ἐστι ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ὥστε καὶ ἡ εγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχει,

ἤπερ

ἤπερ φοα πρὸς ρνγ, ἡ ηε ἄρα πρὸς εγ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{λδ}{Μ}$,θυν πρὸς $\overset{β}{Μ}$,γυθ. συναχθήσεται δὲ τοῦτο οὕτως. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθοῖτο τὴν μὲν εγ, φοα. τὴν δὲ γη, ρνγ, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{λβ}{Μ}$,ςμα. τὸ δὲ ἀπὸ γη $\overset{β}{Μ}$,γυθ. συναμφότερα δὲ ἴσα ὄντα τῷ ἀπὸ εη, ἔσται $\overset{λδ}{Μ}$,θυν. τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ φϙα η ἔγγιστα· ἐλλείπει γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ φϙα ἴσου τετράγωνος εἰς τὸ ἀκριβὲς Μ κα. ςʹ ιςʹ ἔγγιστα. ἡ ἄρα εη πρὸς ηγ, δυνάμει μὲν λόγον ἔχει ὃν $\overset{λδ}{Μ}$,θυν πρὸς $\overset{β}{Μ}$,γυθ. μήκει δὲ ὃν φϙα η ἔγγιστα πρὸς ρνγ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ φοα	ἡ ηγ, ρνγ	φϙα η
ἐπὶ φοα	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ φϙα η
$\overset{κε}{Μ}$ $\overset{ζ}{Μ}$,εφ	$\overset{α}{Μ}$,ετ	$\overset{κε}{Μ}$ $\overset{ζ}{Μ}$,ηφξβ<
$\overset{ζ}{Μ}$,ε ,δλο	,ε ,β φ ,ρν.	$\overset{ζ}{Μ}$,η ηρϙια δ
φοα	τ ρνθ	φϙα η
$\overset{λβ}{Μ}$,ςμα	≠ $\overset{β}{Μ}$,γυθ	ξβ ζια δʹ ηξ δ
	≠ Μ	,θ υα ηζ δ ξ δ
Ἐκ τούτων συνάγεται		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
τὸ ἀπὸ εη		Μ κα ςʹ ιςʹ ἔγγιστα
$\overset{λδ}{Μ}$,θυν		

Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ θε, διὰ τὰ αὐτὰ ἡ εγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ,αρξβ η πρὸς ρνγ. γίνεται γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας, ὡς ἡ ηε πρὸς εγ, ἡ ηθ πρὸς θγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς εγ, ἡ ηγ πρὸς γθ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ, ἡ εγ πρὸς γθ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν εγ, φοα. καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εη φϙα. καὶ ἔτι μορίου τινός. μείζονες ἄρα εἰσίν, ἤπερ ,αρξβ η. καὶ ἔστιν ἡ ηγ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,αρξβ η πρὸς ρνγ.

Η θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ ,αρξβ η πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχουσα, ἤπερ ,αρξβ η πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθοῖτο αὐτὰς οὕτως ἔχειν, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{ρλε}{Μ}$ φλδ <. ξδʹ. τὸ δὲ ἀπὸ γθ $\overset{β}{Μ}$,γυθ. τὸ ἄρα ἀπὸ εθ ἴσον ὂν τοῖς ἀπὸ εγ, γθ, ἔσται $\overset{ρλζ}{Μ}$,γλμγ < ξδʹ, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ,αροβ. λείπεται γὰρ τοῦ ἀκριβοῦς δυναμένας τὸ ἀπ' αὐτῆς Μ ξς. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ,αρξβ η	ἡ θγ ρνγ	,αροβ η
ἐπὶ ,αρξβ η	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ,αροβ η
Μ Μ Μ βξκε	μα ,ετ	Μ Μ Μ βρμς<
Μ Μ ,ςςιβ<	,ε ,β φρν	Μ Μ ζςπα<
Μ ,ςγχξηζ<	τ ρνθ	Μ ,ζ δʹ λρμη < δ
βςρηδ δ	≠ $\overset{β}{Μ}$,γυθ	βςρμδ δ
ρμεδʹ ξδ	≠ $\overset{λ}{Μ}$,γλζ < ξδʹ	ρμς < ξδ
≠ $\overset{ρλε}{Μ}$ φλδ < ξδʹ		
τὸ ἀπὸ εθ ἴσον τοῖς		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ εγ γθ ἐστὶ $\overset{ρλζ}{Μ}$ γλμγ < ξδ.		Μ ξε.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θεγ τῇ εκ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ,βτλδ δʹ πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς ὑπὸ θεγ γωνίας ἐστὶν ὡς ἡ θε πρὸς εγ, ἡ θκ πρὸς γκ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς εγ, ἡ θγ πρὸς γκ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς θγ, ἡ εγ πρὸς γκ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ θε ,αροβ η, καὶ ἔτι μορίου τινός. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ μείζων ἐστὶ ,βτλδ δʹ. καὶ ὑπόκειται ἡ θγ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,βτλδ δʹ πρὸς ρνγ.

Ἡ εκ ἄρα πρὸς τὴν γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ,βτλθ δʹ πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ ἐπεὶ ὑπόκειται

ἡ μὲν

ἡ μὲν ἐγ, ͵βτλδ δ´. ἡ δὲ γκ ͵ργ. ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ ἐγ Μ^{φμθ} ͵ηψκγ ις´. τὸ δὲ ἀπὸ γκ Μ^{β} ͵γυθ. τὰ τούτοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ κε. ἔσται ἄρα Μ^{φνα} ͵βρλβ ις´. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἔγγιστα ͵βτλθ δ´. λείπει γὰρ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς Μ μα ∠´. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἐγ ͵βτλδ δ´	γκ ͵ργ	͵βτλθ δ´
ἐπὶ ͵βτλδ δ´	ἐπὶ ͵ργ	ἐπὶ ͵βτλθ δ´
Μ^{δ} Μ^{ξ} Μ^{θ} ͵ηφ	Μ^{α} ͵ετ	Μ^{δ} Μ^{ξ} Μ^{θ} Μ^{α} κφ
Μ^{ξ} Μ ͵θασο ε	͵εβφρν	Μ^{ξ} Μ ͵θ ͵βψο ε
Μ^{θ} ͵θλςκ ζ∠´	τρυθ	Μ^{θ} ͵θλςο ζ∠´
͵η ασρκι σα	ὁμοῦ Μ^{β} ͵γυθ	Μ^{α} ͵ηβψς ωπα β δ´
φπγ ∠´ ις´		φπδ ∠´ δ´ ις´.
ὁμοῦ Μ^{φμθ} ͵ηψκγ ις´		ὁμοῦ Μ^{φνα} ͵βϡ ∠´ ις´
ἐκ τούτων συνάγεται τὸ		ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ ἐκ Μ^{φμθ} ͵βρλβ ις´.		Μ μα ∠´

Ἐπεὶ δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ ελ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὰ ͵δχογ ∠´ πρὸς ργ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας ἐστὶν, ὡς ἡ κε πρὸς εγ, ἡ κλ πρὸς λγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς εγ, ἡ κγ πρὸς γλ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, ἡ εγ πρὸς λγ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν κε ͵βτλθ δ´, καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εγ ͵βτλδ δ´, καὶ ἔτι μορίου. συναμφότερος ἄρα ἡ κε, εγ μείζων ͵δχογ ∠´. καὶ ἔστιν ἡ κγ, ργ. συναμφότερος ἄρα ἡ εκ, εγ πρὸς κγ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠´ πρὸς ργ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, οὕτως ἡ εγ πρὸς γλ. καὶ ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ ∠´ πρὸς ργ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτον οὖσα ὀρθῆς, δωδέκατον μέρος ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ κεγ, εἰκοστότετάρτον αὖ εἴη. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ θεγ, ὥστε μη´ ἐστί. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἐστὶν ἡ ὑπὸ κεγ. ϟϛ´ ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡμίσεια οὖσα ἡ ὑπὸ λεγ, ρϟβ´ ἐστί. κείσθω οὖν φησὶ ἴση αὐτῇ ἡ ὑπὸ γεμ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ζγ ἐπὶ τὸ μ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ διπλασία οὖσα τῆς ὑπὸ λεγ ϟϛ´ ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ὥστε καὶ ἡ λμ πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϟϛ. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ δέδεικται μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ͵δχογ ∠´ πρὸς ργ, καί ἐστι τῆς μὲν εγ διπλῆ ἡ αγ, τῆς δὲ λγ ἡ λμ, καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς λμ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠´ πρὸς ργ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμ πρὸς αγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ργ πρὸς ͵δχογ ∠´. καὶ ἐπεὶ ἡ λμ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ πλευρὰς ἔχοντος ϟϛ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου ἐστὶ Μ ͵θχπη. ὁ γὰρ ϟϛ ἐπὶ τὸν ργ πολυπλασιαζόμενος τοῦτον ποιεῖ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν αγ διάμετρον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ Μ ͵θχπη πρὸς ͵δχογ ∠´. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει Μ ͵χξζ ∠´. ταῦτα δὲ ἐλάσσονα ἐστὶ τοῦ ἑβδόμου τῆς διαμέτρου μιᾶς μονάδος ἑβδόμῳ μέρει. τὰ γὰρ ἑπταπλάσια τῶν ͵χξζ ∠´, ἅπερ ἐστὶ ͵δχοβ ∠´, ἐλάσσονα ἐστὶ τῆς διαμέτρου Μ α. ἐπεὶ οὖν τὸ πολύγωνον ἔλαττόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον, καὶ ἔτι ἑβδόμῳ ὑπερέχον. ἡ δὲ περίμετρος τοῦ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ πολυγώνου. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἔλασσον ἢ ἑβδόμῳ μέρει.

ΕΙΣ ΤΟ Δ´ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἑξῆς δὲ κατασκευάζων τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ θεωρήματος φησί. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὴν αγ, καὶ τρίτον ὀρθῆς ἡ ὑπὸ βαγ. τοῦτο δὲ ἔσται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ γ τῇ τοῦ ἑξαγώνου ἴσην ἀπολαβόντες τὴν γβ ἐπιζεύξωμεν τὴν αβ. ἡ γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ ἑξαγώνου περιφερείας βεβηκυῖα γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ διμοίρου ἐστὶν ὀρθῆς, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ τρίτου. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβγ, τρίτου δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, διμοίρου ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ. ἐὰν ἄρα προσεκβάλλοντες τὴν γβ ἐπὶ τὸ β, καὶ ἴσην αὐτῇ ἀπολαβόντες ἀπὸ τοῦ α ἐπιζεύξωμεν, ἰσόπλευρον ἔσται τὸ τρίγωνον, καὶ διὰ τὸ τὴν αβ κάθετον διχοτομεῖν τὴν βάσιν, διπλῆ ἐστὶν ἡ αγ τῆς γβ. ἐὰν οὖν πάλιν λάβωμεν τὴν αγ, ͵αφξ ἔσται ἡ γβ, ψπ. ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ αγ ἴσον Μ^{σμγ} ͵γχ. τὸ δὲ ἀπὸ γβ Μ^{ξ} ͵ηυ. καὶ ἐὰν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γβ ἀπὸ τοῦ αγ, λοιπὸν καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ αβ Μ^{ρπβ} ͵ες, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵ατνα ἔγγιστα, περιττεύει γὰρ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς

κριβοῦς Μ α. διό φησιν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ αβ πρὸς βγ, ἤπερ ͵ατνα πρὸς ψπ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αγ ͵αφξ	ἡ γβ ψπ	͵ατνα
ἐπὶ ͵αφξ	ἐπὶ ψπ	ἐπὶ ͵ατνα
Μ Μ Μ	Μ Μ ϛ	Μ Μ Μ α
Μ Μ Μ	Μ ϛϛυ	Μ Μ Μ ϛτ
Μ Μ γχ	ὁμοῦ Μ ϛυ	Μ Μ ͵βφυ
ὁμοῦ Μ ͵γχ		͵ατνα
ὧν ἀφαιρουμένων τῶν ἀπὸ		ὁμοῦ Μ ͵εϛα
βγ ἐκ τῶν αγ, καταλείπονται		παρὰ τὴν δύναμιν τῆς ἀκρι-
Μ ϛρ		βοῦς Μ α.

Τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ αζ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ ηγβ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ηαγ, καὶ ἡ ὑπὸ ηγβ ἄρα τῇ ὑπὸ ηαγ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ αηγ ὀρθή. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ηζγ λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγη ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αηγ τρίγωνον τῷ γηζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αη πρὸς ηγ, ἡ γη πρὸς ηζ. καὶ ἡ αγ πρὸς γζ. τῶν γὰρ ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι. ἀλλ' ὡς ἡ αγ πρὸς γζ, συναμφότερος ἡ γαβ πρὸς γβ, καὶ ἡ αη πρὸς ηγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ, ἔστιν ὡς ἡ βα πρὸς αγ, ἡ βζ πρὸς ζγ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς αγ, ἡ βγ πρὸς γζ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς βγ, ἡ αγ πρὸς γζ. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν αβ ἐλάσσων ἢ ͵ατνα. ἡ δὲ αγ ͵αφξ. ἡ δὲ βγ ψπ. συναμφότερος ἄρα ἡ αβ, βγ πρὸς βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς γζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς γζ, ἡ αη πρὸς ηγ. καὶ ἡ αη ἄρα πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. διὰ τὸν αὐτὸν τοῦτο, ἔσται τὸ μὲν ἐκ τῆς αη Μ ͵γϡκα. τὸ δὲ ἀπὸ ηγ Μ ͵ϛυ. καὶ ἔστιν αὐτοῖς ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. ἐστὶ τὸ ἄρα ἴσαι Μ ͵βτκα. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵γιγ ∠ δ ἔγγιστα. ὑπερέχει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς ἀκριβοῦς δυνάμεως Μ τξηις. διὰ τοῦτο οὖν φησιν, ὅτι ἡ αγ πρὸς γη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵γιγ ∠ δ πρὸς ψπ, οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αη ͵βϡια	ἡ ηγ ψπ	͵γιγ ∠ δ
ἐπὶ ͵βϡια	ἐπὶ ψπ	ἐπὶ ͵γιγ ∠ δ
Μ Μ Μ β	Μ Μ ϛ	Μ Μ ͵θαφψυ
Μ Μ ͵θλ	Μ ϛϛυ	Μ ρλεβ ∠
Μ ͵θρι	ὁμοῦ Μ ϛυ	͵θλθα ∠ ∠ δ
͵βϡια		͵αφϛ ∠ δ η
ὁμοῦ Μ ͵γϡκα		ψνγ δ ηιϛ
		ὁμοῦ Μ ͵βχπθιϛ
τὰ ἀπὸ τῶν αη, ηγ Μ ͵βτκα		ὑπερέχει τῆς ἀκριβοῦς Μ τξηις

Δίχα ἡ ὑπὸ γαη τῇ αθ. διὰ τὴν τῇ διχοτομίαν τῆς γωνίας πρὸς τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, καὶ ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν. καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ἔστιν ὡς συναμφότερος ἡ ηαγ πρὸς ηγ, ἡ αθ πρὸς θγ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ἡ μὲν αη ἐλάσσων ἢ ͵βϡια. ἡ δὲ αγ ἐλάσσων ἤπερ ͵γιγ ∠ δ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ͵ϛϡκδ ∠ δ. ἡ δὲ ηγ ἐστὶ ψπ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵ϛϡκδ ∠ δ πρὸς ψπ. ὥστε καὶ ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵ϛϡκδ ∠ δ πρὸς ψπ. ὥστε ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωκγ πρὸς ρμ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ἐστὶ μέρος ιγ. καὶ τὰ τούτων τετραπλάσια, ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωκγ πρὸς σμ. διὰ τοῦτο γάρ φησιν, ὅτι ἑκατέρα ἑκατέρας ἐστὶ δ ιγ. καὶ ἐπεὶ ἡ αθ ἐστὶν ͵αωκγ. τὸ ἄρα ἀπ' αὐτῆς ἐστὶ Μ ͵γλκθ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ θγ σμ καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς Μ ͵ζϡ. καὶ ἐστὶ τοῖς ἀπὸ αθ, θγ ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. ἴσαι ἄρα Μ ͵λαθ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αωλη ια. τὸ γὰρ ἀπ' αὐτῆς ὑπερέχει τῆς ἀκριβοῦς Μ ͵τκα ἐγγύς. ὥστε ἡ αγ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωλη ια πρὸς σμ, οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

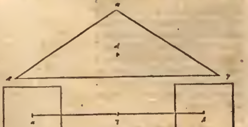
ἡ αθ ͵αωκγ	ἡ θγ σμ	͵αωλη ια

δ', ἃ πρὸς ἐλάττονα ἐστὶ δέκα ἑβδομηκοστομόνων, ὅ ἐστι ͵δ, κζ < ς'' ἔγγιστα. τὰ δὲ δεκαπλάσια τούτων ς ο ζ. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσια, καὶ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. ὡς μὲν οὖν ἐν χώρᾳ οἱ παρ' αὐτοῦ εἰρημένοι ἀριθμοί, μετρίως ἐσαφηνίσθησαν. ἰστέον δὲ ὅτι καὶ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ ὠκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ δι' ἀριθμῶν ἑτέρων ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγαγών. τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ, οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν ἀρχιμήδους σκοπόν. ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὸ σύνεγγυς εὑρεῖν, διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας, ὥστε οὐδὲ πόρος ὁ νικαεὺς δίκαιον εὑρεθήσεται, μέμφεσθαι ἐπάγων ἀρχιμήδει, ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι ποίᾳ εὐθείᾳ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἐξ ὧν αὐτὸς ἐν τοῖς κηρίοις φησί, τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον φίλωνα λέγων, τὸν ἀπὸ γαδάρων εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν τῶν ὑπ' ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε ζ' φημὶ καὶ τῶν ι' θ'. ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται, τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες. κέχρηνται δὲ καὶ τοῖς τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν, τῷ μὴ διὰ τῶν μάγνου λογιστικῶν ἠγμένῳ. εἰ δέ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὸ κατάγειν, ἐξῆν τοῖς ἐν τῇ μαθηματικῇ συντάξει τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα, διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν τοῦτο ποιεῖν, καὶ πεποιήκειν ἂν ἐγὼ τοῦτο, εἰ μὴ ὅπερ πολλάκις εἶπον ἐγνώκειν, ὡς οὔτε ἀκριβῶς δυνατὸν διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων εὑρεῖν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσην εὐθεῖαν. καὶ εἴ τις τὸ σύνεγγυς καὶ παρὰ μικρὸν περιέχει, ἀρκεῖ τὰ ὑπ' ἀρχιμήδους ἐνταῦθα εἰρημένα.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙΜΗδους τῆς κύκλου μέτρησιν ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Α ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ.

ΤΗΝ ῥοπὴν, ὦ γενναιότατε πέτρε, κοινὸν εἶναι γένος βαρύτητός τε καὶ κουφότητος, ἀριστοτέλης τε λέγει, καὶ πτολεμαῖος τούτῳ ἀκολουθῶν. ὁ δέ γε παρὰ πλάτωνι τίμαιος τὴν ῥοπὴν ἐπὶ βαρύτητος λέγει γίνεσθαι. τὴν γὰρ κουφότητα στέρησιν νομίζει, ὧν ἔξεστι τὰς δόξας τοῖς φιλομαθέσι ἀναλέγεσθαι, ἔκ τε τοῦ περὶ ῥοπῶν βιβλίου τοῦ πτολεμαίου συγγεγραμμένου, καὶ ἐκ τῶν ἀριστοτέλους φυσικῶν πραγματειῶν, καὶ ἐκ τοῦ πλάτωνος τιμαίου, καὶ τῶν τοῦτο ὑπομνηματισάντων. ὁ δὲ ἀρχιμήδης ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ κέντρον ῥοπῆς ἐπιπέδου σχήματος νομίζει, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δύο δὲ ἢ πλειόνων ἐπιπέδων κέντρον ῥοπῆς, ἤτοι βάρους, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς παράλληλός ἐστι τῷ ὁρίζοντι, οἷον ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἐν τῷ μέσῳ αὐτοῦ σημεῖόν τι τὸ δ, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δῆλον οὖν ὅτι ἰσορροπήσει τὰ αβγ μέρη ἑαυτοῖς, καὶ οὐδὲ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, μᾶλλον ῥέψει ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ζυγοῦ ὄντος τοῦ α, β, καὶ ἀπηρτημένων ἐξ αὐτοῦ τῶν α, β μεγεθῶν, ἐὰν ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἐπὶ τοῦ γ ἰσορροποῦντα ἔχει τὰ α, β μέρη, παράλληλος μένει τῷ ὁρίζοντι, καὶ ἔσται κέντρον τῆς ἀρτήσεως τῶν α, β μεγεθῶν τὸ γ.



ἡ δζ τῇ βα, καὶ ἴση ἡ γζ τῇ ζα, ἴση ἄρα καὶ ἡ γδ τῇ δβ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν γβ τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν γδ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ γβ ἴσον τῷ ὑπὸ δεα. ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ γδ, δβ, τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ δεη εἴδους. αἱ ἄρα γα, αβ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων.

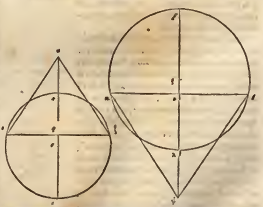
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Δ.

Ἐν δὲ τῇ συνθέσει προσεκβάλλων τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας τὴν δβ, καὶ ἐκθέμενος τῇ ἡμισείᾳ αὐτῆς ἴσην τὴν ζβ. καὶ τεμὼν αὐτὴν εἰς τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ θ, καὶ ἔτι τῆς δβ λαβὼν τὸ χ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὰ αὐτὰ κατασκευάζων τοῖς πρότερον φησί, ὅτι γεγονέτω ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ τίθησι τὸ ρ μεταξὺ τῶν θ, ζ. ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει δεικτέον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς χβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ κβ πρὸς ρβ, ἡ δχ πρὸς βχ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. τουτέστιν ἡ ζβ τῆς βρ, ὥστε τὸ ρ ἐντὸς τοῦ ζ πεσεῖται. ὅτι δὲ καὶ ἐκτὸς τοῦ θ, δειχθήσεται ὁμοίως τοῖς ἐν τῇ ἀναλύσει προειληφθοῦσιν πάσης τῆς συνθέσεως τοῦ θεωρήματος. συνάγεται γὰρ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ρχ πρὸς χλ, ἡ ζθ πρὸς θβ, ὥστε καὶ συνθέντι. καὶ διὰ τοῦτο γὰρ ἀκόλουθος τοῖς ἄνω εἰρημένοις καὶ ἐνταῦθα ἡ δεῖξις.

Καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ. τεταραγμένην ἀναλογίαν ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, ὅταν ᾖ ὡς μὲν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον. ὡς δὲ ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι ἐν τοῖς πρώτοις, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. κἀνταῦθα οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡγούμενον ἡ ρλ πρὸς ἑπόμενον τὴν λδ, οὕτως ἡγούμενον ἡ χζ πρὸς ἑπόμενον τὴν ζθ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ δλ πρὸς ἄλλο τι τὴν δχ, οὕτως ἄλλο τι ἡ εζ πρὸς ἡγούμενον τὴν χζ. ἕπεται ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς δέδεικται ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν στοιχείων, ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ εζη τμῆμα τῷ θκλ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ εζη κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ καταγραφαὶ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ εη, ηζ, εο, οζ, θλ, λκ, θξ, ξκ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ εζη, θκλ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ εηζ, θλκ γωνίαι, ὥστε καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς φ, υ. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ηφζ τρίγωνον τῷ λυκ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, οὕτως ἡ λυ πρὸς υκ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἰσογωνίων ὄντων τῶν φζο, υκξ τριγώνων. ἔστιν ὡς ἡ ζφ πρὸς φο, ἡ κυ πρὸς υξ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ηφ πρὸς φο, ἡ λυ πρὸς υξ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ηο πρὸς οφ, ἡ λξ πρὸς ξυ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς ἡ σο πρὸς οφ, ἡ ρξ πρὸς ξυ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ σοφ πρὸς φο, τουτέστιν ἡ ωφ πρὸς φη, οὕτως συναμφότερος ἡ ρξυ πρὸς ξυ. τουτέστιν ἡ ψυ πρὸς υλ. ἀλλ' ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, ἡ λυ πρὸς υκ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς φζ, ἡ ψυ πρὸς υκ, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ ωφ πρὸς εζ, ἡ ψυ πρὸς θκ, τῶν ἄρα ωεζ, ψθκ κώνων



κώνων ἀνάλογόν εἰσιν οἱ ἄξονες καὶ διάμετροι τῶν βάσεων. ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λόγος δὲ τῆς ω φ πρὸς τὴν ε ζ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν δεδομένα, εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων, ὥστε δέδοται ἡ ε ζ καὶ ἡ η φ. καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς ε ζ ἡ ε φ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ η φ ο. ἐὰν δὲ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ πλάτος ποιεῖ δοθεῖσαν, δοθεῖσα ἄρα ἡ φ ο, ἀλλὰ καὶ ἡ φ η. καὶ ὅλη ἄρα ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας δοθεῖσά ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡμίσεια αὐτῆς δέδοται ἡ σ ο, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ο φ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς σ ο πρὸς ο φ λόγος. καὶ συνθέντι ὡς συναμφοτέρου τῆς σ ο φ πρὸς τὴν ο φ λόγος δοθείς ἐστι, τουτέστι τῆς ω φ πρὸς φ η. καὶ δέδοται ἄρα καὶ ἡ ω φ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ε ζ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ω φ πρὸς ε ζ λόγος. τὰ αὐτὰ δὲ ἂν ῥηθείη καὶ ἐπὶ τοῦ α β γ τμήματος. καὶ συναχθήσεται ὁ τῆς χ τ πρὸς α β λόγος δοθείς, καὶ διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν α β, δοθεῖσά ἐστι καὶ ἡ χ τ.

Ὅτι δὲ ἂν τὰ τμήματα δεδομένα ᾖ, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν δοθήσονται, πρόδηλον μέν. ἵνα δὲ καὶ διὰ τοῦτο ἀκολούθως τῇ στοιχειώσει τῶν δεδομένων δοκῇ συνάγεσθαι, λεχθήσεται. ἐπειδὴ δέδοται τὰ τμήματα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ ἡ ε ζ. καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία, ὥστε καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς, καὶ ἐὰν νοήσωμεν ἐπιζευγνυμένην τὴν ε η δεδομένης τῆς πρὸς τῷ φ ὀρθῆς. δεδομένη ἔσται καὶ ἡ λοιπή. καὶ τὸ ε η φ τρίγωνον τῷ εἴδει. ὥστε καὶ ὁ τῆς ε φ πρὸς φ η λόγος δοθείς ἔσται. καὶ δέδοται ἡ ε φ ἡμίσεια οὖσα τῆς ε ζ, δέδοται ἄρα καὶ ἡ φ η. ῥηθείη δὲ καὶ ἄλλως λέγειν. ἐπειδὴ δέδοται ἡ ε ζ τῇ θέσει, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ φ, διχοτομία γάρ ἐστι τῆς ε ζ, πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ φ η τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ τμήματος τῇ θέσει, δέδοται ἄρα τὸ η. ἦν δὲ καὶ τὸ φ δεδομένον. δέδοται ἄρα καὶ ἡ φ η. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ψ υ πρὸς χ τ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς β α πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ κ θ πρὸς δ. ἐπεὶ γὰρ γέγονεν ὡς ἡ ψ υ πρὸς θ κ, ἡ χ τ πρὸς δ. ἐναλλὰξ ἡ ψ υ πρὸς χ τ ἡ κ θ πρὸς δ. ἀλλ' ὡς ἡ ψ υ πρὸς χ τ, τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν κώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς δὲ αἱ βάσεις πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ β α πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ἡ θ κ πρὸς τὴν δ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ α β πρὸς θ κ, ἡ ε πρὸς δ. ἐπειδὴ ὁ τοῦ λόγου τοῦ ἀπὸ τῆς β α πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ τῆς β α πρὸς ε, καὶ ὁ τῆς κ θ πρὸς δ. καὶ ὁ τῆς β α ἄρα πρὸς ε, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κ θ πρὸς δ. ὥστε ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ β α πρὸς θ κ, ἡ ε πρὸς δ.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ε.

Ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ α β, θ κ, ε, δ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ἡ θ κ πρὸς δ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην, ἐναλλὰξ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἀλλ' ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην.

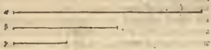
ΕΙΣ ΤΟ Ϛ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ κ λ μ τῷ α β γ τμήματι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρ λ πρὸς ρ ν, ἡ β π πρὸς π θ, ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ μ ν, γ θ. ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ πρὸς τοῖς β λ γωνίαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, γ ὀρθαί, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ, καὶ ἰσογώνιά ἐστι τὰ τρίγωνα. καὶ ἔστιν ὡς ἡ θ β πρὸς β γ, οὕτως ἡ λ ν πρὸς μ ν. ἀλλ' ὡς ἡ β γ πρὸς β π, ἡ μ ν πρὸς ν ρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν γ β π, μ ν ρ τριγώνων. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ β θ πρὸς β π, ἡ λ ν πρὸς ν ρ. ὥστε καὶ διελόντι, ὡς ἡ β π πρὸς π θ, οὕτως ἡ λ ρ πρὸς ρ ν. λόγος δὲ τῆς ε ζ πρὸς β γ δοθείς, δοθεῖσα ἀφαιρεῖται ἑτέρα, ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων. ὥστε ἐπεὶ δέδοται ἡ α γ, δέδοται καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ γ π. δέδοται δὲ καὶ ἡ β π, καὶ ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσιν. δέδοται ἄρα καὶ ἡ β γ διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἡ ε ζ δοθεῖσά ἐστιν. ὥστε καὶ ὁ τῆς β γ πρὸς ε ζ λόγος δοθείς ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ϛ.

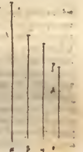
Ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κ μ, α γ τμήματα κύκλων. ἐὰν γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει ἐπιζευχθῶσιν αἱ γ θ, μ ν. ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς γ, μ. καὶ κάθετοι αἱ γ π, μ ρ. μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη ἡ β π, πρὸς τὴν τρίτην τὴν π θ,

γ, ὥστε τὴν α πρὸς τὴν β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν β πρὸς τὴν γ. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν α, γ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς β. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν α πρὸς τὴν β, οὕτως τὴν β πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς γ, ἤπερ διὰ τὸ ἐλαττοῦσθαι τὸν τῆς β πρὸς γ λόγον, καὶ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς α καὶ τῆς μείζονος τῆς γ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α, γ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς β.

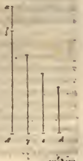


Τὸ ἄρα ὑπὸ θζκ πρὸς τὸ ἀπὸ ζν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ὡς γὰρ ἡ θζ πρὸς ζκ, οὕτως τὸ ὑπὸ θζκ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. τὸ δὲ ὑπὸ θζκ τοῦ ἀπὸ ζκ ἔλασσον. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζδ τοῦ ὑπὸ τῶν βεδ. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ βδε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εδ. τὸ δὲ ὑπὸ βζδ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ δῆλον ὅτι ὅσῳ τὸ διχοτομίας ἐφέστηκεν τὸ ζ μεῖζον, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων. μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων, ὥστε εὐθεῖα ἐὰν εἰς ἄνισα τέμνηται κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἔγγιον τῆς διχοτομίας, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἀπωτέρων τμημάτων.

Ἡ βζ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ. καθόλου γὰρ ἐὰν τέσσαρες ὅροι ὦσι οἱ α, β, γ, δ, ε. καὶ ᾖ τὸ ὑπὸ τῶν α δε, ἔλασσον τοῦ ὑπὸ β γ, ὁ α πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δε. ἔστω γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν β γ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν α ζε. δῆλον ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ γ πρὸς τὸν ζε. ὁ δὲ γ πρὸς τὸν ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν εδ. καὶ ὁ α πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δε.



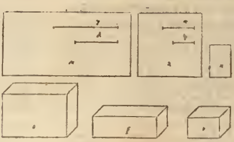
Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ἐκ θν πρὸς τὸ ἐκ νκ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ θβκ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ βν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν ὡς ἡ θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ θβ πρὸς βκ. οὕτως τὸ ἐκ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἐκ τῆς τρίτης, τουτέστι τὸ ἐκ βν πρὸς τὸ ἐκ βκ, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. συνθέντι ὡς ἡ θν πρὸς νβ, ἡ κν πρὸς κβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ θν πρὸς νκ, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἐκ θν πρὸς τὸ ἐκ νκ, οὕτως τὸ ἐκ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἐκ νβ πρὸς τὸ ἐκ βκ, οὕτως ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βκ, οὕτως τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἐκ νκ. τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐκ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. πάλιν γὰρ δύο ἀνίσαις ταῖς θζ, ζκ προσκεῖται ἡ νζ, καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον ἡ θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θν πρὸς νκ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. τὸ ἄρα ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βε, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζκ. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς κζ πρὸς ζκ. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ αβ, γ, δ. ὥστε τὸ ἐκ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν γ πρὸς τὴν δ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν γ, δ μέση ἀνάλογον ἡ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ λόγος διπλάσιον ἐστὶ τοῦ τῆς αβ πρὸς γ. ὁ δὲ τῆς γ πρὸς τὴν δ διπλάσιον ἐστὶ τοῦ τῆς γ πρὸς ε, καὶ ἡ αβ ἄρα πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ πρὸς ε. γεγονέτω οὖν ὡς ἡ ε πρὸς τὴν γ, ἡ γ πρὸς βζ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ βζ, γ, ε, δ, ἡ βζ ἄρα πρὸς δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βζ πρὸς γ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς ε, ἔχει δὲ καὶ ἡ γ πρὸς δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς γ πρὸς ε, ἡ ἄρα βζ πρὸς δ ἡ-



μιόλιον

ΛΗΜΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΞΗΣ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ὅροι οἱ α, γ, δ, β. λέγω ὅτι ὁ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν α, β πρὸς τὸ ἀπὸ γ μετὰ τοῦ τῆς β πρὸς δ λόγου, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ α β ἴσος ὁ κ, τῷ δὲ ἀπὸ γ ἴσος ὁ λ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ β πρὸς δ, οὕτως ὁ λ πρὸς μ. ὁ ἄρα τοῦ κ πρὸς μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ κ πρὸς λ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ λ πρὸς μ, τουτέστι τοῦ β πρὸς δ. ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν ποιείτω. ὁ δὲ λ τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν ξ ποιείτω. τὸν δὲ δ πολλα-



πλασιάσας, τὸν ο. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν α β ὁ κ ἐστιν, ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν πεποίηκεν, ὁ ἄρα ν ἐστὶν ὁ ὑπὸ α β ἐπὶ τὸν β. πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ γ ὁ λ ἐστιν, ὁ δὲ λ τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν ο πεποίηκεν, ὁ ο ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τῆς γ ἐπὶ τὸν δ, ὥστε ὁ τοῦ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερος τῶν κ, λ τὸν β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τὸν ν, ξ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ν πρὸς ξ. πάλιν ἐπεὶ ὁ λ ἑκάτερον τῶν β, δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν ξ, ο πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ ξ πρὸς ο. ἀλλ' ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ λ πρὸς τὸν μ. καὶ ὡς ἄρα ὁ λ πρὸς μ, ὁ ξ πρὸς ο. οἱ ἄρα κ, λ, μ τοῖς ν, ξ, ο ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ πρὸς μ, οὕτως ὁ ν πρὸς ο. καὶ ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος, ὁ αὐτὸς τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ. ὁ δὲ τοῦ ν πρὸς ο λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ δ β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸν ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ.

Φανερὸν δέ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὸν α. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως τὸ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, τῆς β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. ὁ ἄρα ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὴν α.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ Η.

Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς ἐὰν δύο μεγεθῶν ληφθῇ τὸ μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ τὸ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων ὧν ἔχουσι πάντα κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη. καὶ ἐνταῦθα οὖν φησί, ὅτι ὁ τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ β α δ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον. καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα. δηλαδὴ τοῦ δ α β τμήματος, καὶ τοῦ β γ δ μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κωνικῶν. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸν β α δ κῶνον, ὁ τῆς κ θ ἐστὶ πρὸς θ γ, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δ τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου. ἐλέγετο γὰρ τὸ τμῆμα πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ τῷ κώνῳ.

τῷ κώνῳ ἴσον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὁ δὲ τοῦ βαδ κώνου πρὸς τὸν βγδ κῶνον, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θγ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. ὁ δὲ τοῦ βγδ κώνου πρὸς τὸ βγδ τμῆμα, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θζ, διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος, ὥστε ὁ τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ τῆς κθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τῆς κθ πρὸς θγ, μετὰ τῆς αθ πρὸς θγ, ὁ τοῦ ὑπὸ κθα ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ κθα πρὸς τὸ ἀπὸ γθ, μετὰ τῆς αθ πρὸς θζ, ὁ τοῦ ὑπὸ κθα ἐστὶν ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ κθα ἐπὶ τῆς θα, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ. καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι ὅτι τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου, δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ βαδ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ βγδ. τουτέστι τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θγ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσι θεωρήμασι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τῆς θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ ἐλάσσονα, ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. ἀλλὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ λόγου διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τῆς θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τῆς θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ τῆς θκ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. καὶ ἄρα δειχθήσεται, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ, τουτέστι ὅτι μείζων ἡ ζθ τῆς θκ. ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν. ἀνίσοις γὰρ ταῖς αθ, θγ ἴσαι πρόσκεινται αἱ ζα, γκ.

Ταῦτα εἰπὼν, αὐτὸς μὲν οὐκ ἐπήγαγε τὴν σύνθεσιν, ἡμεῖς δὲ αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ζθ τῆς θκ μείζων ἐστὶ, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. ὥστε τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θκ, τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ λόγος διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν ὃν ἔχει ἡ αθ πρὸς θγ, τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἑξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἐπάγει. φημὶ δὴ ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸν ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον. τοῦ γὰρ τῆς αβ πρὸς βγ διπλάσιος μέν ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ βγ τετράγωνον. τριπλάσιος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον. ὡς γὰρ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θβ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, αβθ τριγώνων. ἐὰν δὲ ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον εἰσίν, ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον, ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ τετράγωνον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, ἀλλ' ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. φημὶ οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ ἀπὸ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον, τουτέστιν ὁ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ

δβ. καὶ ὁ διὰ αθ πρὸς θβ. ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ διπλασίων τοῦ διὰ αθ πρὸς θβ. προσλαβὼν τὸν διὰ αθ πρὸς δβ. ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αθ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. ἑκάστος γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστι τριπλάσιος. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς θβ πρὸς θγ, τῆς βθ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης. ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς βθ πρὸς θγ. ἀλλ᾽ ὁ τῆς βθ πρὸς θγ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τῆς βθ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ λόγος μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ θβ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ἀλλ᾽ ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη, τῆς θη κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. φημὶ δὴ ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστι. δεικτέον ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη, τουτέστι τὸ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. ἐὰν γὰρ ὦσι τέσσαρες ὅροι ὡς ἐνταῦθα, τὸ ἀπὸ γθ καὶ τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ ἡ θη καὶ θζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ᾖ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς δέδεικται αὐτόθι. εὔλογος ἄρα ἐχρῆν δεῖξαι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. τουτέστιν δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἡ γθ πρὸς θβ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ γθ πρὸς θβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. τουτέστιν ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ. καὶ ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ᾽ αὐτὴν ἡ βλ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἴση δέ ἐστιν ἡ θζ συναμφοτέρῳ τῇ θακε. ἡ γὰρ αζ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς συναμφότερον τὴν θακε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ηθ τῆς γθ. ἀπὸ δὲ τῆς κε τῆς ελ ἴσης τῇ βθ δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γη πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν αθκλ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἐπεὶ γὰρ δεῖ δειχθῆναι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς συναμφότερον τὴν θακε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θακε πρὸς θβ. τουτέστι πρὸς λε, καὶ διελόντι ἡ ηγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θακλ πρὸς λε, τουτέστι πρὸς βθ. ἐναλλάξ, ὅτι ἡ ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν θακλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτως ἡ θβ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ λε πρὸς αθ. ὅτι ἄρα ἡ ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν θακλ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ λε πρὸς αθ. καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ γη, τουτέστιν ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλθα πρὸς θα, διελόντι ἡ κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ αὐτὴ ἡ κλ πρὸς θα. τουτέστιν ὅτι ἐλάσσων ἡ λε τῆς θα ἐστίν. ἑξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν, ἐπεὶ ἡ λε τῆς αθ ἐλάσσων, ἡ ἄρα κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κλ πρὸς αθ. συνθέντι ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς αθ. ἡ δὲ λε τῇ βθ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα ηγ πρὸς βθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς αθ. ἐναλλάξ, ἡ ἄρα ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν κλαθ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βθ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς θβ. ἐναλλάξ ἡ ηγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς θβ. συνθέντι ἡ ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ μετὰ τῆς θβ, τουτέστι συναμφότερος ἡ αθκε πρὸς βθ. ἴση δὲ ἡ κε τῇ αζ. ἡ ἄρα ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ πρὸς θβ. ἐναλλάξ ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἡ ἄρα ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη, τουτέστι τὸ ἀπὸ

αθ ἐπὶ

κθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς βθ πρὸς θγ, τουτέστι τῷ τῆς αθ πρὸς βθ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς αθ κύβου, πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. τουτέστι τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ θζ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θκ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον λόγον, ἡμιόλιος ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Δῆλον δὲ ὅτι ἡ βα τῆς μὲν ακ ἐλάσσων ἐστὶ, ἢ διπλασία δυνάμει. τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων, ἢ διπλασία. ἐπιζευχθείσης γὰρ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμβλείας γινομένης ὑπὸ τῆς βα, τὸ ἀπὸ τῆς αβ μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν ἴσων οὐσῶν. ὥστε τοῦ ἀπὸ μιᾶς αὐτῶν, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μεῖζόν ἐστιν, ἢ διπλάσιον. πάλιν δὲ τοῦ ἀπὸ αβ ἴσου ὄντος τοῖς ἀπὸ ακ, κβ. καὶ μείζονος ὄντος τοῦ ἀπὸ ακ τοῦ ἀπὸ κβ, τὸ ἀπὸ αβ τοῦ ἀπὸ ακ ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ σχήματος, ἐφ᾽ οὗ σημεῖον θ. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ σχήματι τἀναντία τούτοις εἰκότως λεχθήσεται.

Ἔστω τῇ ελ ἴση ἡ εν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θζ, κῶνος ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτός ἐστι τῷ κατὰ τὴν θεζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θζ, ὕψος δὲ τὴν δε, τοῦ μὲν κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, καὶ ὕψος ἴσον, τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου ἡμιόλιος. τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιον ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου. ἔστι δὲ καὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θζ κύκλον. ὕψος δὲ τὴν λν, διπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κώνου. καὶ τὸ ἡμισφαίριον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν λν.

Τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν αργ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ακγ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. εἴρηται γὰρ αὐτόθεν, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄνισα, κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον, τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν περὶ τὴν ἐγγυτέραν τῆς διχοτομίας τομὴν μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν τμημάτων περὶ τὴν ἑτέραν. τοῦτο δὲ ἐστιν εἰπεῖν. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. ὅσῳ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶ, τοσούτῳ πλέον ἀφέστηκεν ἡ τομὴ τῆς διχοτομίας.

Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αρ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ακ, γξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αβ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ βγ διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον ἦχθαι τὴν βκ, καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοια εἶναι. τῷ ὅλῳ γὰρ τὸ ὑπὸ γακ ἴσον τῷ ἀπὸ αβ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας τῆς γα, καὶ ακ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γξ ακ ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ αβ, τουτέστι τῷ ἀπὸ αρ.

Μεῖζον οὖν ἐστι καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ακ, γξ, τῷ ἀπὸ αρ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ αργ τοῦ ὑπὸ ακγ. ἐὰν δὲ ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, καὶ ἐκεῖνο μεῖζον, ὃ καὶ ἐξ ἀρχῆς μεῖζον, τῷ ὑπὸ αργ προστεθέντος τοῦ ἀπὸ αρ, τῷ δὲ ὑπὸ ακγ τοῦ ὑπὸ ακ γξ, μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ αργ μετὰ τοῦ ἀπὸ αρ, τοῦ ὑπὸ ακγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ ακ γξ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ αργ, μετὰ τοῦ ἀπὸ αρ ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ γαρ, διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. τὸ δὲ ὑπὸ ακγ μετὰ τοῦ ὑπὸ ακ γξ ἴσον τῷ ὑπὸ ακ αξ, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, ὥστε τὸ ὑπὸ γαρ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ακξ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξκα ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μκγ. ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ξγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς ακ. ὥστε καὶ συνθέντι ὡς ἡ ξκ πρὸς κγ, οὕτως ἡ μκ πρὸς κα. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ξκα ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ μκγ. ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ξκα μεῖζον ἦν τὸ ὑπὸ γαρ. καὶ τὸ ὑπὸ γαρ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ μκγ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες εὐθεῖαι

εἰσὶν αἱ γκ, κμ, γα, αρ. καὶ τὸ ὑπὸ πρώτης τῆς γα καὶ τετάρτης τῆς αρ, μεῖζον δή τοῦ ὑπὸ δευτέρας τῆς μκ, καὶ τρίτης τῆς κγ. ἡ πρώτη ἡ γα πρὸς δευτέραν τὴν μκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τρίτη ἡ κγ πρὸς τετάρτην τὴν αρ. καὶ ἐναλλὰξ ἡ γα πρὸς κγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς βγ, διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον εἶναι τῇ βγ, γίνεται ὡς ἡ αγ πρὸς γβ, ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ὅμοιον γὰρ τὸ αβκ τῷ αβγ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἡ δὲ αγ πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. καὶ τὸ ἀπὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἥμισυ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ αβ. ὅπερ δή τὸ ἀπὸ αε, πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡμίσεια τῆς μκ πρὸς τὴν αρ. τουτέστιν ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ αε ἴσον δή τὸ ἀπὸ ζλ. ἐπειδὴ ἡ μὲν αβ τῇ εζ ὑπόκειται ἴση, ἡ δὲ εζ τῇ ζλ δυνάμει διπλῆ. ἴση γὰρ ἡ ελ τῇ λζ. τῆς δὲ αρ διπλασία ἡ νλ. ἐπεὶ καὶ τῆς λζ. ὥς τε τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἥ δή ἐστιν ἴση τῇ λν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν θζ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς νλ. ὥς τε μεῖζον δή ἐστιν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον, τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν ὡς τὸν περὶ διάμετρον τῆς ζθ κύκλον πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, οὕτως τὴν κμ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς λν. καὶ ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐλάσσονα εὐθεῖαν, ἴσος μὲν τῷ μβδ διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐλάττων δὲ τοῦ νθζ διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντας πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ὕψη. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζον δή τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟ-
μνημα εἰς τὸ δεύτερον τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης ὑπὸ μιλησίου μηχανικοῦ ἰσιδώρου ἡμετέρου διδασκάλου.

Εὐτοκίου πινυτοῦ γλυκερὸς πόνος, ὅν ποτ' ἐκεῖνος
γράψεν τοῖς φθονεροῖς πολλάκι μεμψάμενος.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙμήδους τοῦ κύκλου μέτρησιν.

Ἐχόμενον ἂν εἴη τὸν ἐμὸν πληροῦντι σκοπὸν τοῖς σαφεστέροις, καὶ βραχυτέρας ἐπιστάσεως δεομένοις, τῶν ὑπὸ ἀρχιμήδους γεγραμμένων ἐντυγχάνοντι, καὶ τὰ ὁποσοῦν ἐν αὐτοῖς ἐπεξεργασίας δεόμενα, τὸν δυνατὸν τρόπον συνεχῆ ποιεῖν τοῖς πρότερον ὑφ' ἡμῶν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις, ἔχειν ὡς ἀληθῶς ἀξίου τυγχάνοντος τοῦ καὶ τοῖς μείζοσι καὶ πλείονος φροντίδος δεομένοις ἐπιστῆναι. εἴη δ' ἂν ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ἐφεξῆς τὸ γεγραμμένον ἀρχιμήδει βιβλίδιον κύκλου μέτρησιν τὴν ἐπιγραφὴν ἔχον, ἐν ᾧ τὴν πρόθεσιν ταῦ ῥᾷον, ἐξ αὐτῆς τῆς ἐπιγραφῆς γνωρίζομεν. Βούλεται γὰρ ἐπιδεῖξαι τίνι χωρίῳ εὐθυγράμμῳ ἴσος ἂν εἴη κύκλος, πρᾶγμα πάλαι πρὸς τῶν πρὸ αὐτοῦ κλεινῶν φιλοσόφων ἐζητημένον. δῆλον γὰρ ὅτι τοῦτ' ἂν εἴη τὸ ζητούμενον, ὅπερ ἱπποκράτης τε ὁ χῖος καὶ ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὑρήκασιν, οὓς ἀκριβῶς εἰδέναι νομίζω, τούς τε τὴν εὐδήμου γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους, καὶ τῶν ἀριστοτελικῶν μετασχόντας κηρίων. ἀλλ' ἔστι μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον, ὥς φησιν ἡρακλείδης ἐν τῷ ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον. δείκνυσι γὰρ, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει, ἔλαττον μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μεῖζον δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. τοῦτο οὖν φησι σύνεγγυς δεδεῖχθαι, εὑρῆσθαι μέν τοι αὐτῷ διά τινων ἑλίκων εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κύκλου περιφερείᾳ.

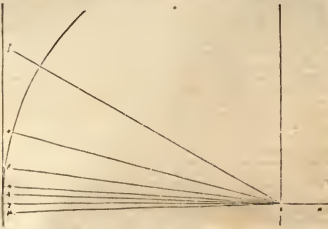
ΕΙΣ ΤΟ Α ΘΕΩΡΗΜΑ.

Το προκείμενον θεώρημα καὶ τοῖς ἐπὶ ποσὸν μαθημάτων γυμνασαμένοις, οὐδεμίαν ἔχον ζήτησιν φαίνεται, αὐτοῦ τοῦ ἀρχιμήδους ῥημάτων σαφῶς ἐκτεθειμένων, καὶ τὸ συμπέρασμα πρὸς τὴν πρότασιν ἀκολούθως ἀποσῴζοντος. δοκεῖ δέ τι κατακεχρῆσθαι πρὸς τὴν ἀπόδειξιν πράγματι μηδέπω δεδειγμένῳ. ἐκθέμενος γὰρ τρίγωνον ὀρθογώνιον φησὶν, ἐχέτω τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν δὲ λοιπὴν τῇ περιφερείᾳ, ἀλλὰ τῇ περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν λαβεῖν, οὐδὲ πρὸς αὐτοῦ ἤδη δεδειγμένον ἐστὶν, ἀλλ' οὐδὲ ὑπ' ἄλλου παραδεδομένον. συνορᾶν δὲ ὅμως χρὴ, ὡς οὐδὲν ἔξω τῶν προσηκόντων ὑπ' ἀρχιμήδους γράφεται. ἔστι γὰρ τὸ μέγεθος τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, πάντη που δῆλον. οἶμαι καὶ τοῦτο τῶν ἐφ' ἓν διαστατῶν. ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα τοῦ αὐτοῦ εἴδους. κἂν εἰ μηδέπω οὖν ἐφαίνετο, δυνατὸν περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως εἶναί τινα τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ πρὸς οὐδενός ἐστι ζητούμενον. τὸ τοίνυν καὶ πρὸς ἀρχιμήδους προτεθὲν τοιοῦτον ἐστίν. ὅτι τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον ὡς προείρηται τὰς πλευρὰς, ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ, ὥστε τὸ προτεθὲν ἐκθέμενος οὐδεμίαν ἂν καταχρήσεως κρίνοιτο. θαύματος δ' ἂν μᾶλλον καὶ τούτοις δόξειεν τοῖς οὕτως ὑπερμεγέθεσι τῶν ζητημάτων σαφῆ καὶ ῥᾳδίαν τὴν εὕρεσιν ἐπιτιθείς. ὡς δὲ εἴρηται, οὐδὲ μιᾶς ζητήσεως τῷ πρώτῳ θεωρήματι. τὸ γὰρ π ο ρ τρίγωνον, ὅτι μεῖζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ α ζ ο μ σχήματος. καὶ ὅτι ἁπλῶς περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, δυνατὸν εὐθύγραμμον περιγράψαι, ὥστε τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγραφομένου εὐθυγράμμου, ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου, σαφῶς εἴρηται ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις ἡμῖν.

ΕΙΣ ΤΟ Γ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου ἀδύνατον. ἀριθμὸν μὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενον ποιεῖ τινὰ τετράγωνον ἀριθμόν. ὃς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὰ γενόμενα, οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον. ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δυνάμει πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν ἥρωνι ἐν τοῖς μετρικοῖς, εἴρηται δὲ πάππῳ καὶ θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν, ἐξηγουμένοις τὴν μεγάλην σύνταξιν τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου. ὥστε οὐδὲν ἡμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν, ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκεί-

νου ἀναλέγεσθαι, καὶ ἡ ὑπὸ γεζ τρίτου ὀρθῆς. ἐὰν γὰρ τὴν τοῦ ἑξαγώνου περιφέρειαν δίχα τεμόντες, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς πρὸς τῷ τρίτῳ ἀπολαβόντες ἐπιζεύξωμεν τὴν εζ, καὶ ἡ ὑπὸ γεζ τρίτου ὀρθῆς. ἡ γὰρ πρὸς τῷ γ ἀπολειφθεῖσα περιφέρεια ἡμίσεια οὖσα τοῦ τοῦ ἑξαγώνου δωδέκατόν ἐστι τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γεζ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ οὖσα, δωδέκατόν ἐστι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, τρίτον ἄρα ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τς πρὸς ρνγ. ὅτι δὲ διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς ζγ, δῆλον ἐντεῦθεν. ἐὰν γὰρ προσεκβαλόντες τὴν ζγ ὡς ἐπὶ τὸ μ. καὶ ἴσην αὐτῇ ἀφελόντες ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τοῦ ε. συσταθήσεται ἡ πρὸς τῷ μ γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ



ε γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ διμοίρου ἰσοπλεύρου. ἄρα τριγώνου ἥμισυ ἐστὶ τὸ γεζ, καὶ διὰ τὸ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοπλεύρου ἴσην οὖσαν τῇ εζ δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τὸ γ, διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς γζ. ἡ δὲ εγ πρὸς γζ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εζ ὑπόκειται τς. ἐὰν αὐτὰ ἐφ' ἑαυτὰ πολυπλασιάσωμεν γενήσεται $\overset{\theta}{M}$ ͵γχλς. ἡ δὲ γζ ἐστὶ ρνγ. ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῆς ἔσται $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ εγ, γζ. ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀπὸ εζ ὄντος $\overset{\theta}{M}$ ͵γχλς, ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γζ ὑπάρχον $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ, καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ εγ $\overset{\zeta}{M}$ σκζ, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ σξε. καὶ ἔτι μόριον ἐλάχιστον καὶ ἀναίσθητον. λείπει γὰρ ἡ τῶν σξε δύναμις τῆς ἀκριβοῦς μονάσιν β. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εζ τς	ἡ ζγ ρνγ	λοιπὸν τὸ ἀπὸ εγ $\overset{\zeta}{M}$ σκζ
ἐπὶ τς	ἐπὶ ρνγ	πλευρὰ σξε $\overset{\zeta}{M}$ σκε
$\overset{\theta}{M}$ ͵αω	$\overset{\alpha}{M}$ ͵ετ	ἐπεὶ ἐλλείπει ἄρα $\overset{\zeta}{M}$ β
͵αωλς	͵ζχν	$\overset{\zeta}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$ ͵β ͵α εἰς τὸ ἀκριβές
ὁμοῦ $\overset{\theta}{M}$ ͵γχλς	υνθ	$\overset{\alpha}{M}$ ͵β ͵γχτ
	$\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ	͵ατκε.

Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἔστιν ἄρα ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ, διὰ τὸ τρίτον θεώρημα τοῦ ἕκτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς εγ, ἡ ζγ πρὸς γη. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. συναμφότερος δὲ ἡ εζ, εγ μείζων ἐστὶν ἤπερ φοα. ἡ μὲν γὰρ ζε ὑπόκειται τς. ἡ δὲ εγ σξε καὶ ἔτι μορίου τινός. ὥστε μείζων εἰσὶ τῶν φοα. ἡ δὲ ζγ ἐστὶ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ὥστε καὶ ἡ εγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχει,

ἤπερ

ἥπερ φϛα πρὸς ρνγ, ἡ εη ἄρα πρὸς ηγ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν Μ^{λδ} ,θυν πρὸς Μ^{β} ,γυθ. συναχθήσεται δὲ οὕτως. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ φϛα πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθοῖτο τὴν μὲν εγ φϛα. τὴν δὲ γη, ρνγ, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ Μ^{λβ} ,ϛμα. τὸ δὲ ἀπὸ γη Μ^{β} ,γυθ. συναμφότερα δὲ ἴσα ὄντα τῷ ἀπὸ εη, ἔσται Μ^{λδ} ,θυν. τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ φϙα ἡ ἔγγιστα. ἐλάττων γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ φϙα ἴσον τετραγώνῳ εἰς τὸ ἀκριβὲς Μ κα. ϛ ιε ἔγγιστα. ἡ ἄρα εη πρὸς ηγ, δυνάμει μὲν λόγον ἔχει ὃν Μ^{λδ} ,θυν πρὸς Μ^{β} ,γυθ. μήκει δὲ ὃν φϙα ἴσον ἔγγιστα πρὸς ρνγ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ φϛα	ἡ ηγ, ρνγ	φϙα δ´
ἐπὶ φϛα	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ φϙα δ´
Μ Μ ,ϛφ	Μ ,ετ	Μ Μ ,ϛφξβ<
Μ ,ϛ ,δλο	,β φ ρ ξ ν	Μ ,ερϙια δ´
φϛα	τ ρ ν θ	φϙα δ
Μ ,ϛμα	Μ^{β} ,γυθ	ξβ ζια δ´ ιϛ´ δ´
		δ υκαζ δ´ ξ´ δ´
Ἐκ τούτων συνάγεται		Ἐλάττων ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
τὸ ἀπὸ εη		Μ κα ε´ ιϛ´ ἔγγιστα
Μ^{λδ} ,θυν		

Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηγ τῇ θγ, διὰ τὰ αὐτὰ ἡ εγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ,αρξβ ἴσον πρὸς ρνγ. γίνεται γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας, ὡς ἡ εη πρὸς εγ, ἡ ηθ πρὸς θγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς εγ, ἡ ηγ πρὸς γθ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ, ἡ εγ πρὸς γθ. καὶ δὴ ἡ μὲν εγ, φϛα. καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εη φϙα. καὶ ἔτι μορίου τινός. μείζονες ἄρα εἰσίν, ἤπερ ,αρξβ ἡ. καὶ ἐστιν ἡ ηγ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,αρξβ ἡ πρὸς ρνγ.

Η θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃ ,αρξβ ἡ πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχουσα, ἤπερ ,αρξβ ἡ πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθοῖτο αὐτὰς οὕτως ἔχειν, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ Μ^{ρλ} ,φλδ< ξ´ δ´. τὸ δὲ ἀπὸ γθ Μ^{β} ,γυθ. τὸ ἄρα ἀπὸ εθ ἴσον ὂν τοῖς ἀπὸ εγ, γθ, ἔσται Μ^{ρλ} ,γλμγ< ξ´ δ´, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ,αροβ. λείπεται γὰρ τῆς ἀκριβοῦς δυνάμεως τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς Μ ,ξϛ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ,αρξβ ἡ	ἡ θγ ρνγ	,αροβ ἡ
ἐπὶ ,αρξβ ἡ	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ,αροβ ἡ
Μ Μ Μ βξκε	μα ,ετ	Μ Μ Μ βεμϛ<
Μ Μ ,ϛ ιβ<	,β φ ρ ξ ν	Μ Μ ,ζ ς κ α ε<
Μ ,ϛ χ ξ κ ζ<	τ ρ ν θ	Μ ,ζ λ ρ μ ε< δ´
β ξ κ δ´ δ´	Μ^{β} ,γυθ	β ο ε μ δ´ δ´
ρ μ ε δ´ ξ´ δ´		ρ μ ϛ< ξ´ δ´
Μ^{ρλ} ,φλδ< ξ´ δ´	Μ^{ρλ} ,γλζ< ξ´ δ´	
τὸ ἀπὸ εθ ἴσον τοῖς		Ἐλάττω ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ εγ γθ ἐστὶ Μ^{ρλ} ,γλμγ< ξ´ δ´.		Μ ,χϛ.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θγ τῇ κγ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ,βτλδ δ´ πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς ὑπὸ θεγ γωνίας δῆλον ὡς ἡ θε πρὸς εγ, ἡ θκ πρὸς γκ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς εγ, ἡ θγ πρὸς γκ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς θγ, ἡ εγ πρὸς γκ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ θε ,αροβ ἡ, καὶ ἔτι μορίου τινός. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ μείζων ἐστὶ ,βτλδ δ´. καὶ ὑπόκειται ἡ θγ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,βτλδ δ´ πρὸς ρνγ.

Ἡ εκ ἄρα πρὸς τὴν γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ,βτλθ δ´ πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ ἐπεὶ ὑπόκειται

ἡ μὲν

ἡ μὲν ε̄γ, ͵βτλδ δ'. ἡ δὲ γ̄κ, ρν̄γ. ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ ε̄γ Μ^{φμδ} ͵ηψκγ ις'. τὸ δὲ ἀπὸ γ̄κ Μ^{β} ͵γυθ. τούτοις δὲ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ κ̄ε. ἔσται ἄρα Μ^{φμζ} ͵βρλβ ις'. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἔγγιστα ͵βτλθ δ'. λείπει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς μονάδας μα ∠. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ ε̄γ ͵βτλδ δ'	κ̄γ ρν̄γ	͵βτλθ δ'
ἐπὶ ͵βτλδ δ'	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ͵βτλθ δ'
Μ^{υ} Μ^{ξ} Μ^{ς} ͵ηφ	Μ^{α} ͵ετ	Μ^{υ} Μ^{ξ} Μ^{ς} Μ^{α} ͵ηφ
Μ^{ξ} Μ^{θ} ͵θασοε	͵ε ͵βφρν	Μ^{ξ} Μ^{θ} ͵θ ͵βψοε
Μ^{ς} ͵θϡρκζ ∠	τρνθ	Μ^{ς} ͵θϡσοζ ∠
͵η ͵ασρκ ις α	ὁμοῦ Μ^{β} ͵γυθ	Μ^{α} ͵η ͵βψσοπαβ δ'
φπγ ∠ ις'		φπδ ∠ δ' ις'.
ὁμοῦ Μ^{φμδ} ͵ηψκγ ις'		ὁμοῦ Μ^{φμζ} ͵βϟ ∠ ις'
ἐκ τούτων συνάγεται τὸ ἀπὸ ε̄κ Μ^{φμζ} ͵βρλβ ις'.		ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς μονάδας μα ∠

Ἐπεὶ δίχα ἡ ὑπὸ κ̄εγ τῇ ε̄λ, ἡ ε̄γ ἄρα πρὸς γ̄λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὰ ͵δχ̄ογ ∠ πρὸς ρν̄γ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας ἐστίν, ὡς ἡ κ̄ε πρὸς ε̄γ, ἡ κ̄λ πρὸς λ̄γ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ κ̄ε, ε̄γ πρὸς ε̄γ, ἡ κ̄γ πρὸς γ̄λ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ κ̄ε, ε̄γ πρὸς κ̄γ, ἡ ε̄γ πρὸς λ̄γ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν κ̄ε ͵βτλ̄θ δ', καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ ε̄γ ͵βτλ̄δ δ', καὶ ἔτι μορίου. συναμφότερος ἄρα ἡ κ̄ε, ε̄γ μείζων ͵δχ̄ογ ∠'. καὶ ἔστιν ἡ κ̄γ, ρν̄γ. συναμφότερος ἄρα ἡ ε̄κ, ε̄γ πρὸς κ̄γ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχ̄ογ ∠ πρὸς ρν̄γ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κ̄ε, ε̄γ πρὸς κ̄γ, οὕτως ἡ ε̄γ πρὸς γ̄λ. καὶ ἡ ε̄γ ἄρα πρὸς γ̄λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχ̄ογ ∠ πρὸς ρν̄γ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζ̄εγ τρίτου οὖσα ὀρθῆς, δωδέκατον μέρος ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ κ̄εγ, εἰκοστότεταρτον ἂν εἴη. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ θ̄εγ, ὥστε μ̄η ἐστί. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἐστὶν ἡ ὑπὸ κ̄εγ. ϟ̄ς ἄρα ἐστί, ὡς ἡμίσεια οὖσα ἡ ὑπὸ λ̄εγ, ρϟ̄β ἐστί. κείσθω οὖν φησὶ ἴση αὐτῇ ἡ ὑπὸ γ̄εμ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ζ̄γ ἐπὶ τὸ μ̄. ἡ ἄρα ὑπὸ λ̄εμ διπλασία οὖσα τῆς ὑπὸ λ̄εγ ϟ̄ς ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ὥστε καὶ ἡ λ̄μ πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϟ̄ς. ἐπεὶ οὖν ἡ ε̄γ πρὸς τὴν γ̄λ δέδεικται μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ͵δχ̄ογ ∠ πρὸς ρν̄γ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ε̄γ διπλῆ ἡ ᾱγ, τῆς δὲ λ̄γ ἡ λ̄μ, καὶ ἡ ᾱγ ἄρα πρὸς λ̄μ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχ̄ογ ∠ πρὸς ρν̄γ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λ̄μ πρὸς ᾱγ ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ρν̄γ πρὸς ͵δχ̄ογ ∠. καὶ ἐπεὶ ἡ λ̄μ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ πλευρὰς ἔχοντος ϟ̄ς. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου ἐστὶ Μ^{α} ͵δχ̄πη. ὁ γὰρ ϟ̄ς ἐπὶ τὸν ρν̄γ πολυπλασιαζόμενος τοῦτον ποιεῖ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ᾱγ διάμετρον ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ Μ^{α} ͵δχ̄πη πρὸς ͵δχ̄ογ ∠. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει Μ^{α} ͵χξ̄ζ ∠. ταῦτα δὲ ἐλάττονα ἐστὶ τοῦ ἑβδόμου τῆς διαμέτρου μιᾶς μονάδος ἑβδόμου μέρει. τὰ γὰρ ἑπταπλάσια τῶν χξ̄ζ ∠, ἅπερ ἐστὶ ͵δχ̄οβ ∠, ἐλάττονα ἐστὶ τῆς διαμέτρου μονάδι ᾱ. ἐπεὶ οὖν τὸ πολύγωνον ἔλαττόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον, καὶ ἔτι ἑβδόμῳ ὑπερέχον. ἡ δὲ περίμετρος τοῦ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ πολυγώνου. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἔλασσον ἢ ἑβδόμῳ μέρει.

ΕΙΣ ΤΟ Δ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἑξῆς δὲ κατασκευάζων τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ θεωρήματος φησί. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὴν ᾱγ, καὶ τρίτου ὀρθῆς ἡ ὑπὸ β̄αγ. τοῦτο δὲ ἔσται, ἐὰν ἀπὸ τῆς γ̄ τῇ τοῦ ἑξαγώνου ἴσην ἀπολαβόντες τὴν γ̄β ἐπιζεύξωμεν τὴν ᾱβ. ἡ γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ ἑξαγώνου περιφερείας βεβηκυῖα γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ διμοίρου ἐστὶν ὀρθῆς, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ τρίτου. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβ̄γ, τρίτου δὲ ἡ ὑπὸ βᾱγ, διμοίρου ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγ̄β. ἐὰν ἄρα προσεκβάλλοντες τὴν γ̄β ἐπὶ τὸ β̄, καὶ ἴσην αὐτῇ ἀπολαβόντες ἀπὸ τῆς ᾱ ἐπιζεύξωμεν, ἰσόπλευρον ἔσται τὸ τρίγωνον, καὶ διὰ τὸ τὴν ᾱβ κάθετον διχοτομεῖν τὴν βάσιν, διπλῆ ἐστὶν ἡ ᾱγ τῆς γ̄β. ἐὰν οὖν πάλιν λάβωμεν τὴν ᾱγ, ͵αφξ, ἔσται ἡ γ̄β, ψ̄π. ὥστε τὸ μὲν ἀπὸ ᾱγ ἔσται Μ^{σμγ} ͵γχ. τὸ δὲ ἀπὸ γ̄β Μ^{ξ} ͵ηυ. καὶ ἐὰν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γ̄β ἀπὸ τοῦ ᾱγ, λοιπὸν καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ ᾱβ Μ^{ρπβ} ͵ες, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵ατ̄να ἔγγιστα, πλεονάζει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς

ἀκριβοῦς Μ α. διὸ φησὶν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ αβ πρὸς βγ, ἤπερ ,ατνα πρὸς ψπ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αγ ,αφξ	ἡ γβ ψπ	,ατνα
ἐπὶ ,αφξ	ἐπὶ ψπ	ἐπὶ ,ατνα
Μ Μ Μ	Μ Μ ς	Μ Μ Μ α
Μ Μ Μ	Μ ςυ	Μ Μ Μ ,ετ
Μ Μ γχ	ὁμοῦ Μ ,ηυ	Μ Μ ,βφν
ὁμοῦ Μ ,γχ		,ατνα
οὖ ἀφελομένων τὸ ἀπὸ βγ ἀπὸ τοῦ αγ, καταλείπονται		ὁμοῦ Μ ,εσα
Μ ,εσ		παρ᾽ ἔλαττον τῆς ἀκριβοῦς Μ α.

Τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ αζ. ἡ ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ ηγβ. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ηαγ καὶ ἡ ὑπὸ ηγβ ἄρα τῇ ὑπὸ ηαγ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ αηγ ὀρθή. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ηζγ λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγη ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αηγ τρίγωνον τῷ γηζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αη πρὸς ηγ, ἡ γη πρὸς ηζ. καὶ ἡ αγ πρὸς γζ. τῶν γὰρ ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι. ἀλλ᾽ ὡς ἡ αγ πρὸς γζ, συναμφότερος ἡ γαβ πρὸς γβ, καὶ ἡ αη πρὸς ηγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ, ἔστιν ὡς ἡ βα πρὸς αγ, ἡ βζ πρὸς ζγ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς αγ, ἡ βγ πρὸς γζ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς βγ, ἡ αγ πρὸς γζ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν βα ἐλάσσων ἢ ,ατνα. ἡ δὲ αγ ,αφξ, ἡ δὲ βγ ψπ, συναμφότερος ἄρα ἡ αβ, βγ πρὸς βγ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,βϡια πρὸς ψπ. καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς γζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,βϡια πρὸς ψπ. ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς γζ, ἡ αη πρὸς ηγ. καὶ ἡ αη ἄρα πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ,βϡια πρὸς ψπ. διὰ τοῦτο, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ αη Μ ,γϡκα. τὸ δὲ ἀπὸ ηγ Μ ,ηυ. καὶ ἔστιν αὐτοῖς ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. ἔσται ἄρα ἴσαι Μ ,βτκα. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ,γιγ∠δ' ἔγγιστα. ὑπερέχει γὰρ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς τῆς ἀκριβοῦς δυνάμεως Μ τξηις. διὰ ταῦτα οὖν φησὶν, ὅτι ἡ αγ πρὸς γη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ,γιγ∠δ' πρὸς ψπ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αη ,βϡια	ἡ ηγ ψπ	,γιγ∠δ'
ἐπὶ ,βϡια	ἐπὶ ψπ	ἐπὶ ,γιγ∠δ'
Μ Μ Μ β	Μ Μ ς	Μ Μ ,θαφψν
Μ Μ ,θλ	Μ ςυ	Μ ,ρλιβ∠
Μ ,θρι	ὁμοῦ Μ ,ηυ	,θλθα∠∠δ'
,βϡια		,αφς∠δ'δ'
ὁμοῦ Μ ,γϡκα		ψνγ δ'δ'ις'
		ὁμοῦ Μ ,βχπθις'
τὰ ἀπὸ τῶν αη, ηγ Μ ,βτκα		ὑπερέχει τῆς ἀκριβοῦς Μ τξηις'

Δίχα ἡ ὑπὸ γαη τῇ αθ. διὰ ταῦτα τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας πρὸς τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, καὶ ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν. καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ, ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ηα, αγ πρὸς ηγ, ἡ αθ πρὸς θγ. καὶ ὑπόκειται ἡ μὲν αη ἐλάσσων ἢ ,βϡια. ἡ δὲ αγ ἐλάσσων ἤπερ ,γιγ∠δ'. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ,εϡκδ∠δ'. ἡ δὲ ηγ ἐστὶ ψπ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ,εϡκδ∠δ' πρὸς ψπ. ὥστε καὶ ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ,εϡκδ∠δ' πρὸς ψπ. ὥστε ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ υνζ∠δ' πρὸς ξ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ἐστὶ μέρος ιγ. ἔστι τὰ τούτων τετραπλάσια, ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,αωκγ πρὸς σμ. διὰ τοῦτο γὰρ φησὶν, ὅτι ἑκατέρα ἑκατέρας ἐστὶ δ' ιγ'. καὶ ἐπεὶ ἡ αθ ἐστὶν ,αωκγ. τὸ ἄρα ἀπ᾽ αὐτῆς ἐστὶ Μ ,γλκθ. ἔστι δὲ καὶ ἡ θγ σμ. ἔστι τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς Μ ,ζχ. ἔστι τοῖς ἀπὸ αθ, θγ ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. ἔσται ἄρα Μ ,γλκθ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ,αωλη θ' ια'. τὸ γὰρ ἀπ᾽ αὐτῆς ὑπερέχει τῆς ἀκριβοῦς Μ τηα ἐγγύς. ὥστε ἡ αγ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,αωλη θ' ια' πρὸς σμ, οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

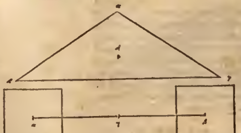
ἡ αθ ,αωκγ	ἡ θγ σμ	,αωλη θ' ια'

δ̄, ἅπερ ἐλάττονα ἐστὶ δέκα ἑβδομηκοστομόνων, ὅ ἐστι Μ, ͵κζ < ς΄ ἔγγιστα. τὰ δὲ δεκαπλάσια τούτων ς ο̄ ζ. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσια, καὶ δέκα ἑβδομηκοστόμονα. ὡς μὲν οὖν ἐν χώρᾳ οἱ παρ' αὐτοῦ εἰρημένοι ἀριθμοὶ, μετρίως ἐσαφηνίσθησαν. ἱστέον δὲ ὅτι καὶ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ ὠκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ δι' ἀριθμῶν ἑτέρων ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγαγών. τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ, οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν Ἀρχιμήδους σκοπόν. ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὸ σύνεγγυς εὑρεῖν, διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας, ὥστε οὐδὲ Πόρος ὁ Νικαεὺς δικαίως εὑρεθήσεται, μεμφόμενος Ἀρχιμήδει, ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι ποίᾳ εὐθείᾳ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἐξ ὧν αὐτὸς ἐν τοῖς κηρίοις φησὶ, τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον Φίλωνα λέγων, τὸν ἀπὸ Γαδάρων εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν τῶν ὑπ' Ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε ζ΄ φημὶ καὶ τῶν ι θ΄. ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται, τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες. κέχρηνται δὲ καὶ τοῖς τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν, τὸν μὴ διὰ τῶν Μάγνου λογιστικῶν ἠγμένον. εἰ δέ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὸ καταγαγεῖν, ἐξῆν τοῖς ἐν τῇ μαθηματικῇ συντάξει τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα, διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν τοῦτο ποιεῖν. καὶ πεποιήκειν ἂν ἐγὼ τοῦτο, εἰ μὴ ὅπερ πολλάκις εἶπον ἐννοῶ, ὡς οὔτε ἀκριβῶς δυνατὸν διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων εὑρεῖν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσην εὐθεῖαν. καὶ εἴ τις τὸ σύνεγγυς καὶ παρὰ μικρὸν περιέχοι, ἀρκεῖ τὰ ὑπ' Ἀρχιμήδους ἐνταῦθα εἰρημένα.

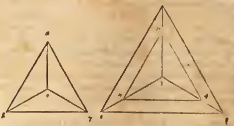
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙΜΗδους τῆς κύκλου μετρήσεως ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Α ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ.

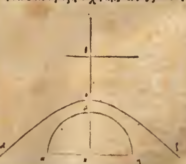
ΤΗΝ ῥοπὴν, ὦ γνησιώτατε Πέτρε, κοινὸν εἶναι γένος βαρύτητος καὶ κουφότητος, Ἀριστοτέλης τε λέγει, καὶ Πτολεμαῖος τούτῳ ἀκολουθῶν. ὁ δέ γε παρὰ Πλάτωνι Τίμαιος πᾶσαν ῥοπὴν ἐπὶ βαρύτητος λέγει γίνεσθαι. τὴν γὰρ κουφότητα στέρησιν νομίζει, ὧν ἔξεστι τὰς δόξας τοῖς φιλομαθέσι συναλέγεσθαι, ἔκ τε τοῦ περὶ ῥοπῶν βιβλίου τῷ Πτολεμαίῳ συγγεγραμμένου, καὶ ἐκ τῶν Ἀριστοτέλους φυσικῶν πραγματειῶν, καὶ ἐκ τοῦ Πλάτωνος Τιμαίου, καὶ τῶν τοῦτο ὑπομνηματισάντων. ὁ δὲ Ἀρχιμήδης ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ κέντρον ῥοπῆς ἐπιπέδου σχήματος νομίζει, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δύο δὲ ἢ πλειόνων ἐπιπέδων κέντρον ῥοπῆς, ἤτοι βάρους, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς παράλληλός ἐστι τῷ ὁρίζοντι, οἷον ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἐν τῷ μέσῳ αὐτοῦ σημεῖόν τι τὸ δ, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δῆλον οὖν ὅτι ἰσορροπήσει τὰ αβγ μέρη ἑαυτοῖς, καὶ οὐδὲ ἕτερον τοῦ ἑτέρου μᾶλλον ῥέψει ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ζυγοῦ ὄντος τοῦ αβ, καὶ ἀπηρτημένων ἐξ αὐτοῦ τῶν α, β μεγεθῶν, ἐὰν ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἐπὶ τοῦ γ ἰσορροποῦντα ἔχῃ τὰ α, β μέρη, παράλληλος μένει τῷ ὁρίζοντι, καὶ ἔσται κέντρον τῆς ἀρτήσεως τῶν α, β μεγεθῶν τὸ γ.



Καλῶς δὲ δοκεῖ ὁ γεμῖνος εἰπεῖν περὶ τοῦ ἀρχιμήδους, ὅτι τὰ ἀξιώματα αἰτήματα λέγει. τὰ γὰρ ἴσα βάρη ἀπὸ ἴσου μήκους ἰσοῤῥοπεῖν ἀξίωμα ἐστὶ, καὶ τὰ ἑξῆς. καὶ ἔτι ταῦτα σαφῆ τοῖς μετρίως αὐτὰ ἐπεσκεμμένοις. τῶν δὲ ἴσων καὶ ὁμοίων φησὶν ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλληλα. πάντα γὰρ τὰ μέρη αὐτῶν πᾶσιν ἐφαρμόζει. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ, τὰ κέντρα τῶν βαρῶν, ὁμοίως ἔσται κείμενα. νοείσθω δὲ ὡς ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα ἄνισα καὶ ὅμοια, κέντρον δὲ βάρους τῶν μὲν αβγ τὸ η, τοῦ δὲ δεζ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, ηγ, βη, δθ, θε, θζ. λέγω ὅτι αἱ ἴσας διαιροῦσι τὰς γωνίας αἱ ἀπὸ τῶν ηθ σημείων ἐπιζευχθεῖσαι. γενέσθω γὰρ ὡς ἡ εζ πρὸς βγ, οὕτως ἡ εθ πρὸς θκ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, καὶ ἡ ζθ πρὸς θλ. καὶ ἡ δθ πρὸς θμ. μκ, κλ, λμ. ἔσται δὴ ὅμοιον τὸ κλμ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ εθ πρὸς θκ, ἡ θζ πρὸς θλ, παράλληλος ἐστὶν ἡ εζ τῇ κλ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μκ τῇ δε, καὶ ἡ λμ τῇ δζ. ὅμοιον ἄρα τὸ δεζ τρίγωνον τῷ κλμ τριγώνῳ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς μκ, ἡ εζ πρὸς κλ, καὶ ἡ δζ πρὸς μλ. ὑπόκειται δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, δεζ τριγώνων, ὡς ἡ δε πρὸς αβ, ἡ βγ πρὸς εζ, καὶ ἡ δζ πρὸς αγ. ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ αβγ ταῖς μκλ. ὥστε ἐφαρμόζει ἑκάστη ἐπὶ ἑκάστην. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ κμλ τριγώνῳ. ὥστε καὶ ἐφαρμόσει τὸ κέντρον τοῦ αβγ ἐπὶ τὸ τοῦ μκλ. τοῦ δὲ η ἐπὶ τὸ θ ἐφαρμόζοντος, καὶ τῶν αβγ ἐπὶ τὰ μκλ, ἐφαρμόσουσιν καὶ αἱ αη, βη, γη, ἐπὶ τὰς μθ, κθ, λθ, καὶ ἴσας ποιήσουσιν γωνίας πρὸς τοῖς μκλ ταῖς ἐν τῷ αβγ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ἐν τῷ δεζ. αἱ αὐταὶ γάρ εἰσιν αἱ ἀπὸ τοῦ θ ἐπί τε τὰ μκλ, καὶ ἐπὶ τὰ δεζ ἐπιζευγνύμεναι.



Παντὸς σχήματος οὗ ἁ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλα ἦ, τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τίνας καλεῖ τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας γραμμὰς, εἴρηται ἡμῖν σαφῶς ἐν τοῖς περὶ ἐρμηνείας τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἔχον τὴν περίμετρον, πάντα τὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου ἐντὸς ἔχει καὶ τὰς γωνίας, δῆλον ὅτι καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐντὸς ἔχει τοῦ σχήματος. ἐπὶ γάρ τινων σχημάτων τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καὶ ἐπὶ τῆς περιμέτρου. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ αβ ἡμικυκλίου κέντρον τοῦ σχήματός ἐστι τὸ γ, ἐπὶ δὲ τῆς δεζ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, ὡς ἔχει τὸ θ. εἴρηται γὰρ ταῦτα ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν. ὅμως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ σχήματος, καὶ ἐπὶ τοῦ δεζ τὸ κέντρον τοῦ βάρους, ἀφ' οὗ δῆλον ὅτι ἀρτώμενον τὸ σχῆμα παράλληλον ἐστὶ τῷ ὁρίζοντι, ἐντὸς ἐστὶ τῆς περιμέτρου. εἰ γὰρ ἔσται ἐπὶ τῆς περιμέτρου, ἢ ἐκτὸς ῥέψει ἐπὶ θάτερα, οὐχ ὑπόκειται.



ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Κέντρον τοῦ βάρους τὸ δ εἰ δυνατόν. ὅτι γὰρ ἐστὶν ἐπὶ τῆς αβ δέδεικται. εἴρηται γὰρ αὐτῷ πρότερον, ὅτι δύο μεγεθῶν κέντρον ἐστὶν, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἰσοῤῥοποῦντα ἔχει τὰ μέρη, παράλληλος μένων τῷ ὁρίζοντι, ὥστε ἂν ἐπὶ τῆς αβ ἐστὶ τὸ κέντρον τῶν αβ μεγεθῶν.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Ἤτοι μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ῥέπειν, ἢ οὔ. τοῦτο τοῦ ῥητοῦ δεῖ ἀκούειν, οὐχ ὡς μείζονος ὑπερέχοντος πάντως τοῦ αβ μεγέθους τοῦ γ, ἀλλὰ μείζονος ὑποκειμένου, ἢ περὶ τὴν ἰσορροπίαν. δυνατὸν γάρ ἐστι καὶ ἔλαττον μέγεθος τοῦ μείζονος μείζονα ἔχειν τὴν ῥοπὴν διὰ τὸ μῆκος τοῦ ζυγοῦ, μεῖζον ὂν πάνυ καὶ ἄνισον ποιεῖν τὸν λόγον. ὥστε καὶ ἀφῃρῆσθαι ἐκ τοῦ αβ ἔλασσον τῆς ὑπεροχῆς. ἢ μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν, ὥστε λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶναι τῷ γ. δεῖ φησὶν ἀφελεῖν ἐκ τοῦ αβ μέγεθός τι τὸ β, ὃ ποιεῖ λοιπὸν τὸ α, τῷ γ σύμμετρον, καὶ μεῖζον τὸ α τοῦ γ ἢ περὶ τὴν ἰσορροπίαν. τοῦτο δὲ δυνατὸν ποιεῖν, διὰ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ δεκάτου τῶν στοιχείων Εὐκλείδου εἰρημένων, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τῶν θεοδοσίου σφαιρικῶν.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΙ.

Καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζκ, λμ. τεμοῦνται δὴ αὗται δίχα τὰς βγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βσ τῇ ψγ, καὶ ἡ δβ τῇ δγ. ἔσται ὡς ἡ δβ πρὸς σβ, ἡ δγ πρὸς ψγ. καὶ διελόντι ὡς ἡ δσ πρὸς σβ, ἡ δψ πρὸς ψγ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ δσ πρὸς σβ, ἡ αε πρὸς εβ. ἡ γὰρ εσ παράλληλός ἐστι τῇ αδ. ὡς δὲ ἡ δψ πρὸς ψγ, ἡ λζ πρὸς ζγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς εβ, ἡ αζ πρὸς ζγ. παράλληλος ἐστὶν ἄρα ἡ εζ τῇ βγ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαί. τὸ δὴ αδγ τρίγωνον πρὸς πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ ἀναγεγραμμένα, ὅμοια τῷ αδγ, τὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γα πρὸς αμ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιά ἐστι τὰ αδγ, ασμ τρίγωνα, πρὸς ἄλληλα διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αγ πρὸς αμ. ἐπεὶ δὲ νῦν ὑπόκειται, ἡ αγ τῆς αμ τετραπλασίων, τὸ αδγ τρίγωνον πρὸς τὸ ασμ λόγον ἔχει, ὃν ις πρὸς ἕν. πρὸς δὲ πάντα τὰ τρίγωνα, τὰ ἀπὸ αμ, μκ, κζ λόγον ἔχει ὃν ις πρὸς τέσσαρα. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ, ὅμοια τῷ αδγ, οὕτως αὐτὰ τρίγωνα πρὸς τὸ ασμ, τουτέστιν ἡ γα πρὸς αμ. ὅμοια γάρ εἰσι καὶ ἐπὶ ἴσων βάσεων, καὶ διὰ τοῦτο ἴσα, καὶ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. ἀλλὰ ἡ γα πρὸς αμ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. ὁ γὰρ τῆς αγ πρὸς αμ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς φρ πρὸς ρπ. εἰ γὰρ νοήσαιμεν ἐκβεβλημένας τὰς ρφ, γδ, καὶ συμπιπτούσας διὰ τὰς παραλλήλους, ἔσται ὡς ἡ φρ πρὸς ρπ, ἡ γδ πρὸς δω. ἀλλ᾽ ὡς ἡ γδ πρὸς δω, ἡ γα πρὸς αμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αμ, ἡ φρ πρὸς ρπ. ἡ δὲ φρ πρὸς ρπ μείζονα ἔχει λόγον, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. καὶ ἡ γα ἄρα πρὸς αμ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. ὅπερ ἀδύνατον. τὰς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ τὴν δα ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται πάντα τὰ κέντρα. τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος, καὶ ῥέψει δῆλον ὅτι ἐπ᾽ ἐκεῖνο πάντα τὰ μεγέθη, καὶ οὐκ ἰσορροπήσει, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὑπόκειται γὰρ κέντρον τῶν μὲν παραλληλογράμμων τὸ ρ, τῶν δὲ τριγώνων τὸ χ.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ ΓΑ.

Ὁμοίως γὰρ ἐν τοῖς κειμένοις τὰ θκ, λε τοῖς τριγώνοις. αἵ τε γὰρ αβ ε, κζ α παράλληλοι οὖσαι ὁμοίως διαιροῦσι τὰς γωνίας, καὶ αἱ θλγ, βκβ αἱ αὐταί εἰσι, ἐν πᾶσι τοῖς τριγώνοις. καὶ λοιπαὶ αἱ κδ, δλ.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Ἐὰν γὰρ ἐκβάλλῃς τὰς γδη, ζεη, βαθ, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἔρχονται. ἐκβληθεισῶν γὰρ τῶν βαη, ζεη, καὶ συμπιπτουσῶν ἀλλήλαις κατὰ τὸ η. καὶ ἡ βδ ἐκβαλλομένη ἐν τῷ αὐτῷ πεσεῖται. ἔστι δὲ ὡς ἡ βη πρὸς ηα, ἡ ζη πρὸς ηε, καὶ ἡ βζ πρὸς αε, καὶ ἡ ζγ πρὸς εδ. καὶ δηλαδὴ ἡ δη πρὸς δε. ἔσται δὴ τοῦ μὲν βδγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς θμ. ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἡ βθ τῆς βδ. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν αἱ αε, βζ, γδ. κέντρον ἄρα ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ αβγ τριγώνου τὸ η. καὶ φανερὸν ὅτι πάντα τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ ὅτι αἱ ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν ἐπιζευγνύμεναι διὰ τοῦ η ἔρχονται. ἵνα μὴ τοῦ αὐτοῦ πλείονα κέντρα ᾖ. ἐπεὶ δὲ ἴσαι αἱ αδ, δβ, βε, εγ, γζ, ζα, ἴσα ἔσται καὶ τὰ τρίγωνα ὧν κορυφὴ τὸ η ση-



μέσον, βάσεις δὲ αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι. ὥστε διπλάσιόν ἐστι τὸ αηβ τρίγωνον, τοῦ αβε τριγώνου, ὥστε καὶ ἡ αε τῆς ηε. καὶ διὰ τὸ η παρὰ τὴν βγ ἀγομένην τὴν θκ διπλασία ἐστὶν ἡ αθ τῆς θβ, ὥστε καθόλου ἐὰν μία πλευρὰ τριγώνου τμηθῇ, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ μέρος διπλάσιον εἶναι τοῦ πρὸς τῇ βάσει, καὶ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου παράλληλος ἀχθῇ τῇ βάσει, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου.

ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ
βιβλίον τέλος.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Β ΤΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ.

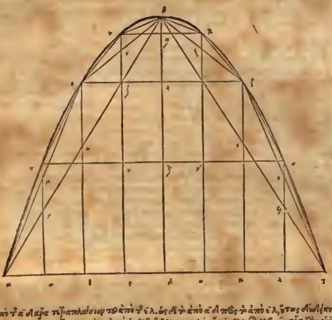
ΑΚΡΙΒΩΣ ἐπεξελθόντες τοῦ πρώτου, καὶ σαφηνίσαντες τὰ ἐν αὐτῷ δυσθεώρητα, ἀναγκαῖον ἡγούμεθα καὶ τὰ ἐν τῷ δευτέρῳ δυσχερῶς εἰρημένα μετρίως ἐκθέσθαι. φησὶ τοίνυν ἐν τῇ προτάσει τοῦ πρώτου θεωρήματος, ὑποκείσθω τὰ αβγ δ χωρία περιεχόμενα ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν παραβαλεῖν. τοῦτο δὲ αὐτόθεν μὲν διὰ τῶν ἐνταῦθα δεδειγμένων οὐκ ἔστιν εὑρεῖν. ἐπεὶ δὲ δέδεικται αὐτῷ, ὡς ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου εἶπεν, ὅτι τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. τῷ δὲ ἐπιτρίτῳ τοῦ τριγώνου ἐπιπέδῳ εὐθυγράμμῳ ὄντι, δυνάμεθα ἴσον παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν. φανερὸν ὅτι καὶ τοῖς τοιούτοις σχήμασι, τὰ δὲ ἐν τῇ κατασκευῇ εἰρημένα ἅπαντα δῆλά ἐστι διὰ τοῦ τετάρτου θεωρήματος τοῦ πρώτου τούτων τῶν βιβλίων.

ΕΙΣ ΤΟ Β.

ΤΟΥ δευτέρου θεωρήματος τὸ λέγει τινά, δηλοῦντα τὰς δυνατὸν ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ σχῆμα γνωρίμως ἐγγράφεσθαι, καὶ φησὶ ταῦτα δεικτέον ἐν ταῖς τάξεσιν. ἐπειδὴ οὖν ἀσαφές ἐστι τὸ λεγόμενον, ἀναγκαῖον εἰπεῖν βραχέα περὶ αὐτοῦ ἐκ τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν εὑρεθέντα. ἔστω σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ παραβολῆς τῆς αβγ, καὶ εὐθείας τῆς αγ, οὗ διάμετρος ἔστω ἡ βδ. φανερὸν δὴ ὅτι κορυφή ἐστι τοῦ τμήματος τὸ β σημεῖον. κορυφὰς γὰρ καλεῖ τῶν γραμμῶν ὁ Ἀπολλώνιος τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῶν διαμέτρων. ἐὰν δὴ ἐπιζεύξωμεν τὰς αβ, βγ, ἔσται τὸ ἀπὸ αβγ τρίγωνον τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον τὴν ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὴν αβ κάθετον ἀγομένην. οὕτως γὰρ πάντως ἄξομεν ἐστὶν ἡ βδ. ἐὰν δὲ λαβόντες τὰς κορυφὰς τῶν αβ, βγ τμημάτων τὰς ε, ζ, δι' αὐτῶν παραλλήλους ἀγάγωμεν τῇ βδ, ὡς τὰς εη, ζ, ἔσονται αὗται διάμετροι τῶν αβ, βγ τμημάτων. δέδεικται γὰρ ὑπὸ τῆς παραβολῆς, ὅτι πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν διάμετρον ἀγόμεναι διάμετροί εἰσι τῆς τομῆς, ἔσονται δὴ τὰ ε, ζ κορυφαὶ τῶν τμημάτων, καὶ αἱ διὰ τῶν ε, ζ ἐφαπτόμεναι παράλληλοι ταῖς αβ, βγ. ἔσται δὲ καὶ ἡ ελζ παρὰ τὴν αβγ. ἐπεὶ δὲ αἱ εθ, ζκ παράλληλοί εἰσι καὶ ἴσαι, διάμετροι οὖσαι τῶν ἴσων τμημάτων, καὶ ἐφαρμόζουσαι ἀλλήλαις ὡς ἐν τῷ ε̄ τῶν κωνικῶν δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἡ εθκ παράλληλός ἐστι τῇ βδ, ἔστιν ὡς ἡ βκ πρὸς κα, ἡ δθ πρὸς θα. ἴση δὲ ἡ θβ τῇ ακ. δίχα γὰρ αὐτὴν τέμνει ἡ εκ διάμετρος παράλληλον οὖσαν τῇ ἐφαπτομένῃ. ἴση ἄρα καὶ ἡ δθ τῇ θα, διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ δκ τῇ κγ ἴση ἐστί. ἴση δὲ ὅλη ἡ αδ τῇ δγ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δθ τῇ δκ. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ελ τῇ λζ. ὥστε ἀληθῶς λέγει ὅτι ἡ τὰς κορυφὰς τῶν τμημάτων ἐπιζευγνύουσα παράλληλος ἔσται τῇ βάσει τοῦ τμήματος, καὶ δίχα διαιρεθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ τμήματος διαμέτρου. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αε, εβ, βζ, ζγ. καὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ μ, ν, ξ, ο σημεῖα. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν μ, ν, ξ, ο παρὰ τὴν βδ, αἱ πμρς, τυνφ, χξψω, σολ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ απ, πε, ετ, τβ, βχ, χζ, ζσ, σγ. καὶ αἱ τρχ, καὶ πβγδεσ. φανερὸν δὴ ἐκ τῶν προδεδειγμένων, ὅτι ἡ τχ καὶ ἡ εζ καὶ ἡ πσ παράλληλοί εἰσι τῇ αγ. καὶ ὅτι ἴση ἡ τρ τῇ ρχ. καὶ ἡ πδ τῇ δσ. λέγω οὖν ὅτι τέμνουσι τὴν βδ ὡς οἱ ἑξῆς περισσοὶ ἀριθμοί, τουτέστιν οἷον ἐστὶν ἑνὸς ἡ βρ, τοιούτων

τριῶν

ποιοῦν ἡ α λ, καὶ ἡ χ δ πεμπτὴ, καὶ ἡ δ δ ἑπτά. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ α γ τῇ α β, καὶ παράλληλος ἡ ε β τῇ β δ, ἴση ἄρα καὶ ἡ α β τῇ β δ, ἡ α δ ἄρα τῆς δ θ διπλῆ ἐστιν. ὥστε καὶ τῆς ε λ, τὸ



ἀπὸ τῆς α δ ἄρα τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ε λ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε λ, οὕτως δέδεικται ἡ β δ πρὸς β λ. τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ δ β τῆς β λ. τριπλῆ ἄρα ἡ δ λ τῆς λ β. οἵων ἄρα ἐστὶν ἑνὸς ἡ λ β, τοιούτων τριῶν ἐστιν ἡ λ δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἵων ἄρα ἡ λ β τεσσάρων, ἡ λ δ δώδεκα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ε υ τῇ υ β, καὶ ἡ ε ζ τῇ ζ λ, καὶ ἡ θ φ τῇ φ δ, διπλασία ἐστὶν ἡ ε λ τῆς λ ζ, τουτέστι τῆς τ α. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ε λ τοῦ ἀπὸ τ α, τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ λ β τῆς β α. ὥστε τριπλασία ἡ λ α τῆς α β. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ λ β τεσσάρων, τοιούτων ἡ μὲν β α ἑνός, ἡ δὲ α λ τριῶν, ἡ δὲ λ δ δώδεκα. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α μ τῇ μ ε, καὶ ἡ α ρ τῇ ρ α, καὶ ἡ α c τῇ c θ, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ α c, c θ, θ φ, φ δ. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ α δ τεσσάρων, τοιούτων ἡ c δ τριῶν, τουτέστιν ἡ π δ. οἵων ἄρα τὸ ἀπὸ α δ δεκαέξ, τοιούτων τὸ ἀπὸ π δ ἐννέα. καὶ οἵων ἄρα ἡ δ β δεκαέξ, ἡ β δ ἐννέα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ λ δ ἑπτά. ἐπεὶ οὖν δέδεικται οἵων ἡ β δ δεκαέξ, τοιούτων ἡ μὲν β α ἑνός, ἡ δὲ α λ τριῶν, ἡ δὲ λ δ ἑπτά, καὶ λοιπὴ ἡ δ δ ἐστὶ πέντε. τέμνεται ἄρα ἡ β δ ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου τοῦ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος. δῆλον οὖν ἐστιν ἐκ τῆς καταγραφῆς, ὅτι αἱ καταγόμεναι ὑπὸ τῶν διαμέτρων εἰς τοὺς ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀριθμούς,* οἵων γὰρ ἐστιν ἑνὸς ἡ τ α, τοιούτων ἐστὶ δύο ἡ ε λ, τριῶν δὲ ἡ π δ, τεσσάρων δὲ ἡ α δ. παράλληλοι γὰρ οὖσαι πᾶσαι εἰς ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὀνομάζεται δὲ ὑπὸ ἀρχιμήδους τὸ α π ι τ β χ ζ ς γ σχῆμα γνωρίμως ἐγγραφόμενον.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

ΤΑ ὅμοια τμήματα τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἀπολλώνιος ὡρίσατο ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῶν κωνικῶν, ἐν οἷς ἀχθεισῶν ἐν ἑκάστῳ παραλλήλων τῇ βάσει, ἴσων τὸ πλῆθος αἱ παράλληλοι, καὶ αἱ βάσεις πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας ἀπὸ τῶν διαμέτρων ταῖς κορυφαῖς ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις εἰσί, καὶ αἱ ἀποτεμνόμεναι πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας. καὶ ὅτι αἱ παραβολαὶ πᾶσαι ὅμοιαί εἰσι, τὸ δὲ γνώριμον ἐγγραφόμενον σχῆμα εὕρηται ἐν τῷ προλαβόντι λήμματι, τὸ δὲ ὅμοιον διαιρεῖσθαι

τὰς

τὰς διαμέτρους ἐστίν, ἵνα τὰ τμήματα αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, τὰ λοιπὰ τοῦ θεωρήματος σαφῆ ἐστιν ἐκ τοῦ προειρημένου σχήματος.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Ἐγγεγράφθω εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμῆμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ κ. τοῦτο δὲ φανερόν ἐστιν ἐκ τῶν εἰρημένων ἐν τῷ δεκάτῳ τῆς στοιχειώσεως, καὶ ἐν τῷ πρώτῳ τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ θζνι. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ κζ, λθ. ἴσων γὰρ εἰσὶ τμημάτων διάμετροι, καὶ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ βδ ἄξονος, καὶ ὁμοίως διῄρηνται ὑπὸ τῶν θ, ι κέντρων. ἔστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θζ, ἡ λι πρὸς ιν, καὶ ἐναλλάξ. καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ θζ τῇ ιν, ἔστι δὲ καὶ παράλληλος. παράλληλοι γὰρ εἰσὶ πᾶσαι αἱ διάμετροι τῆς παραβολῆς, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ θζνι.

ΕΙΣ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ Ε.

Ἔστω δὲ τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμημάτων συγκειμένου μεγέθους κέντρον βάρους τὸ χ, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τριγώνων τὸ τ. δέδεικται μὲν γὰρ ἐν τῷ προλαβόντι, ὅτι ἡ θι ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ κέντρα τῶν τμημάτων, διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς βδ κατὰ τὸ χ, παράλληλος οὖσα τῇ ζν, καὶ ἡ ζν διχοτομεῖται κατὰ τὸ τ. ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τὸ τ τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ τῶν ακβ, βλγ τριγώνων. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ βαγ τρίγωνον πρὸς τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα, καὶ τὰ ἑξῆς. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τοῦ μὲν αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους τὸ ε, τῶν δὲ ακβ, βλγ τριγώνων κέντρον τὸ τ, φανερὸν ὅτι τοῦ ακβλγ εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τῆς τε τμηθείσης κατὰ τὸ ρ κατὰ τὸν ἀντιπεπονθότα λόγον τοῦ ὃν ἔχει τὸ αβγ πρὸς τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα. ἐπεὶ δὲ τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα. μείζονα γὰρ ἐστὶ τὰ τμήματα τῶν τριγώνων. δῆλον ὅτι ἐὰν τέμωμεν τὴν ετ ἐν τῷ λόγῳ τῷ ὃν ἔχει τὸ τρίγωνον πρὸς τὰ τμήματα, ἀνωτέρω τοῦ ρ πεσεῖται τὸ σημεῖον, ὃ ἔσται κέντρον τοῦ παντὸς τμήματος, διὰ τὴν ἀντιπεπόνθησιν.

ΕΙΣ ΤΟ Ϛ.

Τὸ κέντρον τοῦ τμήματος πάντως ἐστί, καὶ ἐγγύτερον τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἤπερ τὰ τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων. τοῦ γὰρ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν εἰ τύχοι τὸ ε τῆς βδ τμηθείσης οὕτως, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν εβ τῆς εδ. φανερὸν ὅτι πάντα τὰ κέντρα τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων μεταξὺ πεσοῦνται τῶν β, ε σημείων. καὶ ὅσον δ' ἂν πολυπλευρότερον ᾖ τὸ γνωρίμως ἐγγραφόμενον, τοσούτῳ μᾶλλον συνεγγίζει τῷ β. φανερὸν οὖν ὅτι τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων τοῦ γνωρίμως ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου, καὶ τοῦ τμήματος μείζονα μὲν εἶναι τῆς εβ ἀδύνατον, ἐλάσσονα δὲ δυνατὸν οὐ μόνον τῆς βε, ἀλλὰ καὶ πάσης τῆς δοθείσης.

ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

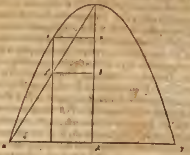
Ἐγγεγράφθω γὰρ εἰς τὸ αβγ τμῆμα τὸ ἐν τῷ δεζ τμήματι ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως. ὁμοίως γὰρ γνωρίμως ἐγγράφεται, ὅταν αἱ τομαὶ τῆς αβγ παραβολῆς ἴσαι γίνωνται ταῖς δεζ, ὥστε τὰς πλευρὰς τοῦ ἐν τῷ αβ τμήματι ἐγγεγραμμένου γνωρίμως ἰσοπληθεῖς εἶναι ταῖς ἐν τῷ εζ ἐγγεγραμμένου εὐθυγράμμου. ἐπεὶ γὰρ δὲ κορυφαί εἰσι τὰ β ζ σημεῖα τῶν ὁμοίων τμημάτων, ὅμοια ἐστὶ τὰ οὕτως γνωρίμως ἐγγραφόμενα.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ κμ πρὸς μζ. ὅμοια γὰρ ὄντα τὰ τμήματα ἕξει κέντρα εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τέμνοντα τὰς διαμέτρους. καὶ συνθέντι ὡς ἡ βδ πρὸς δθ, ἡ κζ πρὸς ζμ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ βδ πρὸς κζ, οὕτως ἡ δθ πρὸς μζ. τετραπλασία δὲ ἡ βδ τῆς κζ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται οὕτως σημεῖον θ. ἑξῆς δὲ αὐτὸ ἡμεῖς δείξομεν. ἔστω παραβολὴ ἡ αβγ, ἧς διάμετρος ἡ βδ. καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ αβ κατὰ τὸ ζ, καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ βδ παράλληλος ἤχθω ἡ εζ. διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ αβ τμήματος. καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ παρατεταγμένως ἤχθωσαν αἱ εκ, ζθ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αζ τῇ βζ, διπλῆ ἐστὶν ἡ αβ τῆς ζβ, καὶ ἡ δβ τῆς βθ, καὶ ἡ αδ τῆς ζθ, τουτέστι τῆς εκ. ὥστε τὸ ἀπὸ αδ τοῦ ἀπὸ εκ ἐστὶ τετραπλάσιον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ δβ τῆς βκ ἐστὶ τετραπλασία μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ βδ τῆς

μὲν

μὲν βθ διπλῆ, ἡ βθ τῆς βκ ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἡ θκ τῇ κβ ἴση, τουτέστι τῇ εζ. διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ εκζθ. τετραπλασία ἄρα ἡ βδ τῆς ζε.



Καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἡ βδ τῆς βε. καὶ γὰρ τοῦτο δέδεικται. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ λήμματι ἡ βδ ἑκατέρας τῶν βκ, εζ τετραπλασία, ὥστε ἡ βκ τῇ εζ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐν τούτῳ ἡ βε τῇ κζ ἴση, καὶ ἡ βδ ἑκατέρας αὐτῶν τετραπλασία. ἡ βξ ἄρα τῆς βδ τρίτον μέρος. ἐπεὶ γὰρ τετραπλασίων ἡ βδ τῆς βε. οἵων ἄρα ἡ βδ τεσσάρων, ἡ βε ἑνός. καὶ οἵων ἄρα ἡ βδ δώδεκα, τοιούτων ἡ βε τριῶν. τριπλῆ δὲ ἡ βε τῆς εξ, οἵων ἄρα ἡ βε τριῶν, ἡ ξε ἑνός, καὶ ὅλη ἡ βξ τεσσάρων. τούτων δὲ ἦν ἡ βδ δώδεκα. ἡ βξ ἄρα τῆς βδ τρίτον μέρος ἐστί. τριπλοῦν δὲ τὸ αβγ τρίγωνον τῶν τμημάτων. δέδεικται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ ἐν τῷ περὶ τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ὅτι πᾶν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ αβγ τμῆμα τοῦ αβγ τριγώνου ἐπίτριτόν ἐστι, καὶ διελόντι τὸ αβγ τρίγωνον τῶν ακβ, βλγ τμημάτων τριπλάσιόν ἐστι, καὶ ἐν τῇ τῆς ιδ τριπλασία. ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ βθ τῆς θδ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἐπεὶ γὰρ τριπλῆ ἐστιν ἡ βδ τῆς δι. οἵων ἄρα ἡ βδ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ ιδ πέντε· οἵων δὲ ἡ δι πέντε, τοιούτου ἡ θι ἑνός, καὶ ὅλη ἡ θι, δι ἕξ. ἑξαπλασία ἡ δθ τῆς θι. οἵων ἄρα ἡ βδ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ δθ ἕξ. καὶ λοιπὴ ἡ θβ ἐννέα, ὥστε ἡμιολία ἐστὶν ἡ βθ τῆς θδ.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

ΤΟ ἐν τούτῳ θεώρημα ταῦτ' ἐν ἐλάσσοσιν ἐκθησόμεθα παραφράζοντες σαφῶς κατὰ τὸ δυνατόν. ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αβ, βγ, δβ, βε, καὶ διελόντι, καὶ ἐναλλὰξ αἱ αγ, γδ, δε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἐπεὶ οὖν αἱ αβ, βγ, βδ, δε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ αἱ αγ, γδ, δε, ἐστὶν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον, καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον. ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ αγ, γδ, τουτέστιν ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως συναμφότερος ἡ αβ, γβ πρὸς δβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ αβ, γβ πρὸς δβ, οὕτως ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ πρὸς τὴν β τῆς βδ. διότι τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ πρὸς τὴν β τῆς δβ. πάλιν ἐπειδὴ αἱ γβ, βδ, βε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ αἱ αγ, γδ, δε. ἔστι διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, ὡς ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως συναμφότερος ἡ γβ, βδ πρὸς βε. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ αδ πρὸς δε, ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ πρὸς τὴν β τῆς βδ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως τὰ ἡγούμενα πρὸς τὰ ἑπόμενα. ἔστι δὲ ἡγούμενα μὲν ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ, καὶ συναμφότερος ἡ γβ, βδ, τουτέστι δύο αἱ αβ, καὶ τρεῖς αἱ γβ, καὶ μία ἡ βδ. ἑπόμενα δὲ ἡ β τῆς βδ, καὶ ἡ εβ μόνη. ἔστιν οὖν ὡς ἡ αδ πρὸς δε, ἡ συγκειμένη εὐθεῖα, ἔκ τε τῆς β τῆς αβ, καὶ γ τῆς γβ, καὶ τῆς δβ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εβ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς αβ, καὶ τῆς δ τῆς γβ, καὶ τῆς δ τῆς δβ, καὶ τῆς β τῆς βε, τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς β τῆς αβ καὶ γ τῆς γβ, καὶ τῆς βδ μόνης. ἐλάττων δέ ἐστιν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εβ. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δβ, καὶ τῆς εβ μόνης, ἤπερ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς αβ, καὶ τῆς γ τῆς γβ, καὶ μόνης τῆς δβ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς

διπλῆς τῆς β δ, καὶ μόνης τοῦ ε β. ἀλλ' ὡς ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τοῦ α β, καὶ γ τοῦ γ β, καὶ τοῦ β δ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς β δ, καὶ μόνης τῆς ε β, οὕτως ἐδείχθη ἡ α δ πρὸς δ ε. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τοῦ γ β, β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β τῆς β δ, καὶ μόνης τοῦ ε β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α δ πρὸς δ ε. ἐὰν ἄρα θελήσωμεν ποιῆσαι τὸν αὐτὸν τῆς α δ πρὸς ἄλλην τινά, ἐλάσσων ἔσται ἐκείνη τῆς δ ε. ἔστω ἡ δ ο. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α δ πρὸς δ ο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γ β, β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς β δ, καὶ μόνης τῆς ε β. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ο δ πρὸς δ α, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς β δ, καὶ μόνης τῆς ε β, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ τῆς δ συναμφοτέρου τῆς γ β, β δ, καὶ συντεθέντι, ὡς ἡ ο α πρὸς α δ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς α β, καὶ δ τῆς γ β, καὶ ς τῆς β δ, καὶ γ τῆς β ε, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γ β, β δ. ἅτε γὰρ β δ ἑξάκις περιελήφθη, τετράκις μὲν ἐν τοῖς προτέροις, δὶς δὲ ἐν τοῖς δευτέροις, καὶ ἡ β ε τρὶς ἐλήφθη, δὶς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις, ἅπαξ δὲ ἐν τοῖς δευτέροις. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ α δ πρὸς α θ τοῦτον ἔχουσα τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ι συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς γ β, β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς α β, καὶ δ τῆς γ β, καὶ ς τῆς β δ, καὶ γ τῆς β ε. καὶ ἔστι τεταραγμένη ἀναλογία. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ο α πρὸς α θ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ι συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ ι τῆς γ β, β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ δ τῆς γ β, β δ. τὸ γὰρ τῆς γεγραμμένης ἀναλογίας οὕτως ἐστὶ δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ ο α, πρὸς ἑπόμενον τὴν α δ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς α β, καὶ δ τῆς γ β, καὶ ς τῆς β δ, καὶ γ τῆς β ε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τοῦ β συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γ β, δ β. ὥστε ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ α δ πρὸς ἄλλο τι τὴν α θ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν, ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ι συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς γ β, β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β τῆς α β, καὶ δ τῆς γ β, καὶ ς τῆς β δ, καὶ γ τῆς β ε. ἐπεὶ ἡ ι συναμφοτέρου τῆς α β, β ε πρὸς τὴν β τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἔχει δὲ καὶ ἡ ι συναμφοτέρου τῆς γ β, β δ πρὸς τὴν δ τῆς αὐτῆς λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ καὶ τὰ πέντε πρὸς δύο, καὶ τὰ δέκα πρὸς τέσσαρα λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τοῦ ι συναμφοτέρου τοῦ α β, β ε, καὶ ι συναμφοτέρου τοῦ γ β, β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τοῦ β συναμφοτέρου τοῦ α β, β ε, καὶ δ τοῦ γ β, β δ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ὡς δὲ καὶ ἡ α ο πρὸς α θ λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ἐν τοῖς ἀνωτέρω, ὅτι ἡ ο δ πρὸς δ α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε β μετὰ τοῦ β τοῦ β δ πρὸς τὴν ἴσην τῇ συγκειμένῃ ἐκ τε τοῦ β συναμφοτέρου τοῦ α β, β ε, μετὰ τὴν δ συναμφοτέρου τοῦ γ β, β δ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἡ α δ πρὸς ἄλλο τι τὴν δ ε, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τοῦ β τοῦ α β, καὶ γ τοῦ γ β, καὶ μόνης τοῦ δ β πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τε τοῦ ε β, καὶ τοῦ β τῆς β δ. ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστι τεταραγμένης οὔσης τῆς ἀναλογίας, δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ἡ ο δ πρὸς δ ε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς α β, καὶ τῆς γ τῆς γ β, καὶ μόνης τῆς β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τοῦ β συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ δ τοῦ γ β, β δ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ε δ πρὸς δ ο, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γ β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β τοῦ α β, καὶ γ τοῦ γ β, καὶ μόνης τοῦ β δ. καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ δ ε πρὸς ε ο, τὸ ἡγούμενον φημὶ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, οὕτω ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τοῦ α β ε, μετὰ τῆς δ τῆς γ β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς γ β μόνης, καὶ γ τῆς β δ, καὶ τῆς β τῆς ε β. ἐν μὲν γὰρ τῷ ἡγουμένῳ ἡ β τοῦ α β, καὶ τῆς β ε. ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ β τοῦ α β μόνης. ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ β τῆς ε β. πάλιν ἐν μὲν τῷ ἡγουμένῳ ἡ δ συναμφοτέρου τῆς γ β δ, ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ γ τοῦ γ β, καὶ ἡ β δ μόνη. ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ γ β μόνη, καὶ ἡ γ τοῦ β δ. καλῶς οὖν ἐλέχθη, ὅτι ἐστὶν ἀναστρέψαντι ὡς ἡ δ ε πρὸς ε ο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γ β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς γ β, καὶ τοῦ γ τῆς δ β, καὶ τῆς β τῆς ε β. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ο ε πρὸς ε δ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ β, μετὰ τῆς γ τῆς β δ, καὶ β τῆς ε β, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γ β δ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δ β πρὸς ἄλλο τι τὴν ε β, ἡ α β πρὸς β γ. καὶ διελόντι ὡς ἡ

δ ε

δε πρὸς εβ, ἡ αγ πρὸς γβ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἔστιν ὡς ἡ γδ πρὸς δβ, οὕτως ἡ δε πρὸς εβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ̄ τῆς γδ πρὸς τὴν γ̄ τῆς δβ, οὕτως ἡ β̄ τῆς δε πρὸς τὴν β̄ τῆς εβ. τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς εβ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τοῦ αγ, καὶ τοῦ γ̄ τῆς γδ, καὶ ἡ β̄ τῆς δε πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τοῦ γβ, καὶ τοῦ γ̄ τοῦ βδ, καὶ τοῦ β̄ τῆς εβ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ δε πρὸς ἑπόμενον τὴν δε, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡ συγκειμένη ἐκ τοῦ γβ, καὶ τοῦ γ̄ τῆς βδ, καὶ β̄ τῆς βε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τοῦ αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τοῦ γβ δ. ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ δε πρὸς ἄλλο τι τὴν εβ, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τοῦ αγ, καὶ ἡ γ̄ τῆς γδ, καὶ β̄ τοῦ δε πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τοῦ γβ, καὶ γ̄ τοῦ δβ, καὶ β̄ τοῦ βε. διʼ ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ δε πρὸς εβ, ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς αγ, καὶ γ̄ τοῦ γδ, καὶ ἡ β̄ τοῦ δε πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τοῦ β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ ε, μετὰ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ δ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ δβ πρὸς β̄ε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τοῦ αγ, καὶ γ̄ τῆς γδ, καὶ β̄ τοῦ εδ, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τοῦ γβ δ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τοῦ αβ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ δ. ἀλλὰ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ γ̄ τοῦ γδ, καὶ β̄ τοῦ δε, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τοῦ γβ δ. ἴση δή ἐστι τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τοῦ γ̄ τῆς αβ, καὶ ε̄ τῆς γβ, καὶ γ̄ τοῦ δβ. ἥ τε γὰρ αβ δὶς παρελήφθη αὐτόθεν, καὶ προσλαβοῦσα τὴν αγ, καὶ ἐκ τῆς δ̄ τοῦ γβ μίαν, ποιεῖ τρίτον τὴν αβ. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τοῦ δ̄ τῆς γβ μίαν, γίνεται γ̄. προσλαβοῦσα δὲ τὴν γ̄ τοῦ γδ, καὶ γ̄ τῆς δβ, ποιεῖ τὴν ε̄ τῆς γβ. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τοῦ δβ, γ̄, μένει μόνη ἡ δβ. προσλαβοῦσα δὲ τήν τε β̄ τῆς δε, καὶ τὴν β̄ τῆς εβ, ποιεῖ τὴν γ̄ τοῦ β̄δ. καλῶς οὖν λέγει, ὅτι ἡ δβ πρὸς εβ τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τοῦ γ̄ τοῦ αβ, καὶ ε̄ τοῦ γβ, καὶ γ̄ τοῦ δβ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ δ. πάλιν ἐπεὶ αἱ εδ, δγ, γα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ διὰ τὸ ἀνάπαλιν τῆς ὑποθέσεως συναμφότερος ἑκάστη τῶν εβ, β̄δ, δβ, β̄γ, β̄α. ἔσται ὡς ἡ εδ πρὸς τὴν μέσην καὶ τὴν ἑπομένην τὰς δγ, γα, τουτέστι τὴν δα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, β̄δ πρὸς συναμφότερον τὴν δβ, β̄γ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς γβ, β̄α. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς εα πρὸς αδ, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ δ, μετὰ συναμφοτέρου τοῦ δβ γ, καὶ μετὰ συναμφοτέρου τοῦ γβ α, πρὸς συναμφότερον τὴν δβ γ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς γβ α. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ εβ δ μετὰ τοῦ δβ̄γ, καὶ τῆς γβ̄α, ἴση δή ἐστι συναμφοτέρῳ τῇ εβ̄α, καὶ δὶς συναμφοτέρῳ τῇ δβ̄γ. ἅπαξ γὰρ αἱ ἄκραι παραλαμβάνονται, καὶ δὶς αἱ μέσαι. συναμφότερος δὲ ἡ δβ̄γ μετὰ τοῦ γβ̄α, ἴση δή ἐστι συναμφοτέρῳ τῇ αβ̄δ, καὶ δὶς τῇ γβ, διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν. ὥστε δῆλον ὡς ἡ εα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς εβ̄α, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς δβ γ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς δβ̄α, καὶ τῆς β̄ τῆς γβ. ὥστε καὶ ἡ διπλασία πρὸς τὴν διπλασίαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ὡς ἄρα ἡ εα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τοῦ εβ α, μετὰ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ δ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τοῦ αβ δ, καὶ τῆς δ̄ τῆς γβ. ὥστε καὶ ὡς ἡ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ δ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ δ, καὶ τῆς δ̄ τῆς γβ. ἀλλʼ ὡς ἡ αε πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς αδ, οὕτως ἐλήφθη ἡ β̄ε πρὸς ζα. καὶ ὡς ἄρα ἡ εβ πρὸς ζα, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄ε, καὶ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τοῦ β̄ συναμφοτέρου τοῦ αβ δ, καὶ δ̄ τοῦ γβ. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὡς ἡγούμενον ἡ δβ πρὸς ἑπόμενον τὴν βε, οὕτως ἡγούμενον ἡ γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβ δ, καὶ μετὰ τῆς ε̄ τῆς γβ, πρὸς τὴν β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ δ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ εβ πρὸς ἄλλο τι τὴν ζα, οὕτως ἡγούμενον ἡ β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ ε, καὶ ἡ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ δ πρὸς τὰ τρία πέμπτα τοῦ ἑπομένου, τουτέστι τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τοῦ αβ δ, καὶ τῆς δ̄ τῆς γβ. τεταγμένης οὖν οὔσης τῆς ἀναλογίας διʼ ἴσου δῆλον, ὡς ἡ δβ πρὸς ζα, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβ δ, καὶ ε̄ τῆς γβ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ δ, καὶ δ̄ τῆς γβ. ἡ δὲ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβ δ, καὶ ε̄ τῆς γβ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ δ, καὶ δ̄ τῆς γβ, λόγον ἔχει ὃν τρία πρὸς δύο. τὰ δὲ ἑξαπλάσια τῶν αὐτῶν

τετραπλασίων ἡμιόλια ἐστί. πῶς; δὲ τρία πέμπτα τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο, ἐπειδὴ δὲ τὰ ἡγούμενα τῶν ἑπομένων ἡμιόλια, καὶ λόγον ἔχει πρὸς αὐτά, ὃν τρία πρὸς δύο, ἔχει ἄρα καὶ ὃν τεσσαράκοντα πέντε πρὸς τριάκοντα. ἑκάτερον γὰρ ἑκατέρου ἐστὶ πεντεκαιδεκαπλάσιον. καὶ ἐστὶ τὰ τρία πέμπτα τῶν τριάκοντα δεκαοκτώ. ἔχει ἄρα τεσσαράκοντα πέντε πρὸς δεκαοκτὼ λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. τὰ γὰρ πέντε καὶ τὰ δύο ἀμφοτέρων ἐνσιν ἐννεάτα. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ἡ μὲν ο α πρὸς α β λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο, ἡ δὲ ο β πρὸς ζ π τὸν αὐτὸν λόγον, δύο πεμπτημόρια ἐστὶν ὅλη ἡ ζ β ὅλης τῆς α β.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Φανερὸν δή, ὅτι καὶ τοῦ α δ γ τόμου διάμετρός ἐστιν ἡ ζ η. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἡ ζ β διάμετρος τοῦ τμήματος, καὶ αἱ α γ, δ ε διχοτομούμεναι ὑπ' αὐτῆς, ἤτοι τὸ ζ, η, παράλληλοί εἰσιν τῇ ἤτοι τὸ β ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς. καὶ δῆλον ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ὁμοίως αὐταῖς ἀγόμεναι παράλληλοι, εἴτε μεταξὺ αὐτῶν, εἴτε καὶ μεταξὺ τῆς δ ε, καὶ τῆς β κορυφῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς β ζ. καὶ διὰ τοῦτο φασὶ διάμετρον εἶναι τοῦ τόμου τὴν ζ η. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ ζ β κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον, οὕτως τὸ ἀπὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ δ β ε τμῆμα. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὑπ' αὐτοῦ, ὅτι τὸ α β γ τμῆμα τοῦ α β γ τριγώνου ἐστὶν ἐπίτριτον, καὶ τὸ δ ε β τμῆμα τοῦ δ ε β τριγώνου, ἔστιν ὡς τὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ α β γ τρίγωνον, οὕτως τὸ δ ε β τμῆμα πρὸς τὸ δ ε β τρίγωνον. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὥστε καὶ τὰ ἥμισυ αὐτῶν, ὡς τὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ δ ε β τμῆμα, οὕτως τὸ α ζ β τρίγωνον πρὸς τὸ δ η β τρίγωνον. ὥστε καὶ ἐὰν ἀναγράψωμεν τὰ παραλληλόγραμμα διπλάσια τῶν τριγώνων, ἔσται ἰσογώνια διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς δ η α ζ. ὥστε καὶ λόγον ἕξει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς α ζ πρὸς δ η, καὶ τῆς β ζ πρὸς β η. ὁ αὐτὸς γὰρ λόγος ἐστὶ τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τμημάτων. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς α ζ πρὸς δ η, καὶ τοῦ τῆς ζ β πρὸς β η. ὁ γὰρ τῆς ζ β πρὸς β η λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ α ζ πρὸς τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ἀπὸ α ζ πρὸς τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, καὶ τοῦ τῆς α ζ πρὸς δ η. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ α ζ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν, ὡς δέδεικται ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς δ η, καὶ τῆς α ζ, πρὸς τὸν ἀπὸ α ζ κύβον, λόγον ἔχει ὃν ἡ β τῆς δ η μετὰ τῆς α ζ πρὸς ζ α. ἐπὶ γὰρ τῶν αὐτῶν βάσεων ὄντα πρὸς ἄλληλα, ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δ η πρὸς α ζ, ἡ ξ ν πρὸς ν μ. καὶ ὡς ἡ β τῆς δ η πρὸς α ζ, ἡ β τῆς ξ ο πρὸς ο μ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ β τῆς ο ξ μετὰ τῆς ν μ πρὸς ο μ, ἡ β τῆς δ η μετὰ τῆς α ζ πρὸς α ζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ μ ν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ο ξ κύβον, καὶ ἡ μ ο πρὸς ν τ, τέσσαρες εἰσὶν ἀνάλογον. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὥστε ὁ ἀπὸ δ η κύβος πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην δυσὶν ἔκ τε τῆς β τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η, οὕτως ἡ δ η πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η. πάλιν γὰρ πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ὡς δὲ ἡ δ η πρὸς τὴν β τῆς α ζ μετὰ τῆς δ η, οὕτως ἡ τ ν πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς ν ο, καὶ τῆς τ ν. ἔστι γὰρ ὡς ἡ α ζ πρὸς δ η, ἡ μ ν πρὸς ο ξ, καὶ ἡ ο ν πρὸς ν τ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ δ η πρὸς α ζ, ἡ τ ν πρὸς ν ο. καὶ ὡς ἡ δ η μετὰ τῆς β τῆς α ζ πρὸς δ η, οὕτως ἡ τ ν μετὰ τῆς β τῆς ν ο πρὸς ν ο. γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη ἑξῆς ἀλλήλων κείμενα. πρῶτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δ η, καὶ τῆς α ζ, δεύτερον ὁ ἀπὸ τῆς α ζ κύβος. καὶ τρίτον ὁ ἀπὸ τῆς δ η κύβος, καὶ τέταρτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς δ η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η. καὶ ἄλλα τινὰ ἐκτεθεῖσι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμενα, ἥ τε συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ν ξ, καὶ μόνης τῆς μ ν, καὶ δευτέρα ἡ μ ο, καὶ τρίτη ἡ ν τ, καὶ τετάρτη ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ο ν, καὶ τῆς ο τ. δι' ἴσου ἄρα γενήσεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς διπλῆς τῆς δ η, καὶ τῆς α ζ μόνης, πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, ὕψος τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς α ζ, καὶ μόνης τῆς δ η, οὕτως συγκειμένης ἐκ τῆς β τῆς ξ ν, καὶ μόνης τῆς μ ν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς ν ο, καὶ μόνης τῆς ν τ. ἀλλ' ὡς τὰ

εἰρημένα

ἀρτημένα ἐστὶ πρὸς ἄλληλα, οὕτως ἐδείχθη ἡ θι πρὸς ικ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θι πρὸς ικ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ δλ β δλ ξν, καὶ μόνης δλ μν, πρὸς τὴν β δλ ον, καὶ μόνης δλ ντ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ θκ πρὸς κι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ συναμφοτέρου δλ μντ, καὶ τοῦ β συναμφοτέρου δλ ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ δλ β τοῦ ον, καὶ μόνης δλ ντ, καὶ τοῦ ἡγουμένου τοῦ ε. ὡς ἡ αζ πρὸς κι, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τοῦ μντ, καὶ ι συναμφοτέρου δλ ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς ϛ τοῦ νο, καὶ μόνης δλ ντ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ζκ πρὸς ζρ, οὕτως αὐτῆς δύο πέμπτα. ἑκάτερα γὰρ τῶν αθ ζκ δύο πεμπτημόρια ἐστὶ δλ υζ. ἐπεὶ δὲ τὸ μέσον πεμπτημόριον ἡ θκ ὑπόκειται, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ δλ ε συναμφοτέρου τοῦ μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τοῦ ξνο, πρὸς τὴν β συναμφοτέρου δλ μντ, καὶ δ συναμφοτέρου δλ ξνο. καὶ γὰρ τὰ β τῶν ε, καὶ τὰ δ τῶν ι δύο πεμπτημόριά ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ ζκ πρὸς ικ, οὕτως ἡ ε δλ μντ, καὶ ι δλ ξνο, πρὸς τὴν ϛ δλ νο, καὶ μόνην τὴν ντ. πάλιν δὲ ἐδείχθη ὡς ἡ ζκ πρὸς ζκ, ἡ ε συναμφοτέρου δλ μντ, καὶ ι δλ ξνο, πρὸς τὴν β τοῦ μντ, καὶ δ δλ ξνο. ἔσται ὡς ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, ὡς ἡ ζκ πρὸς ζι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ δλ ε συναμφοτέρου δλ μντ, καὶ ι συναμφοτέρου δλ ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ δλ β δλ ον, καὶ μόνης τῆς ντ, καὶ τοῦ β συναμφοτέρου δλ μντ, καὶ δ δλ ξνο, ἃ δή ἐστι τῇ συγκειμένῃ ἐκ δλ β δλ μν, καὶ δ δλ νξ, καὶ ε δλ νο, καὶ γ δλ ντ. οὕτως γὰρ ἀλήπται καὶ ἀνωτέρω. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μν, νξ, ον, ντ, καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ντ πρὸς τὴν μ, οὕτως ἀληλημμένη τις ἡ ρι πρὸς τὴν ζθ, τουτέστι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τοῦ αζ, τουτέστι δλ μο, καὶ δειλεγμέναι εἰσὶν αἱ ἐν τῷ ῥητῷ ἀναλογίᾳ. ἔσται διὰ τὸ προειρημένον ἡ ρζ δύο πέμπτα τοῦ μν, τουτέστι τοῦ ζβ. τρία ἄρα πέμπτα ἐστὶν ἡ βρ τοῦ βζ. ἡ βρ ἄρα πρὸς ρζ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τοῦ αβγ τμήματος τὸ ρ σημεῖον. ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸ τοῦ δβε τμήματος τὸ χ, τρία πέμπτα ἔσται ἡ βχ δλ βη. γέγονεν ὡς ὅλη ἡ ζβ πρὸς ὅλην τὴν βρ, οὕτως ἀφαιρεθεῖσα ἡ βη πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὴν βχ. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν πρὸς ἑκατέραν λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ζη πρὸς λοιπὴν τὴν χρ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὡς ὁ αδγ τομεὺς πρὸς τὸ δβε τμῆμα, οὕτως ἡ μτ πρὸς ντ. ὡς δὲ ἡ μτ πρὸς τν, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τοῦ ηζ, τουτέστιν ἡ ζθ, ἤτοι ἡ χρ πρὸς ρι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸ τμῆμα, ἡ χρ πρὸς ρι. καὶ ἀντιπεπόνθασιν, καὶ ἐστὶ τὸ ρ κέντρον τοῦ ὅλου τμήματος, τοῦ ἄρα τόμου κέντρον ἐστὶ τὸ ι.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β΄ τῶν ἰσορροπικῶν ἀρχιμήδους.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE